UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

64. BAND, 2. HEFT
AUSGEGEBEN IM MÄRZ 1960)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1960

Moh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I, Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

64. Band./2. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Brauner, H. Die Strahlfläche 3. Grades mit konstantem Drall 101

Jenner, W. E. On Arithmetical Properties of Riemann Matrices 110

Marcus, S. Sur certains problèmes et théorèmes concernant la continuité et la dérivabilité des fonctions 119

Zaubek, O. Über die Verteilung der Extremstellen halbstetiger Funktionen 131

Izbicki, H. Graphentransformationen 135

Nöbauer, W. Zur Theorie der Vollideale 176

Engelmann, F. Zur Realisierbarkeit der Darstellungen der 3-dimensionalen Drehgruppe 184

Buchbesprechungen 188

Die Strahlfläche 3. Grades mit konstantem Drall

Von

H. Brauner, Wien

(Eingegangen am 29. April 1959)

Für die windschiefen Strahlflächen konstanten Dralls habe ich kürzlich eine Reihe von Eigenschaften angegeben, gewisse Normalformen dieser Flächen analytisch erfaßt [1] sowie Zusammenhänge dieser Flächen mit der Kurventheorie aufgezeigt [2]. Es ist daher naheliegend, nach konkreten Flächen dieser Art zu fragen und insbesondere algebraische Strahlflächen konstanten Dralls aufzusuchen. Wir lassen dabei die abwickelbaren Strahlflächen, deren Drall identisch 0 oder ∞ ist, außer Betracht und beschränken uns auf Strahlflächen mit mindestens einer stetigen Schar reeller Erzeugenden. Solche Flächen werden i. f. *reelle Strahlflächen* genannt. Außer dem einschaligen Drehhyperboloid und den (keineswegs einfachen) Binormalenflächen algebraischer Raumkurven konstanter Torsion [1, S. 107] ist bisher bloß eine von *J. Krames* gefundene Cayleysche Fläche 3. Grades [4], [5, S. 241] als Beispiel für algebraische reelle Strahlflächen konstanten Dralls bekannt.

In dieser Note wird nachgewiesen, daß die zuletzt genannte Fläche die *einzige konstant gedrallte, reelle Strahlfläche 3. Grades* darstellt. Zu diesem Zweck werden zunächst gewisse Eigenschaften konstant gedrallter Strahlflächen hergeleitet, mit deren Hilfe es gelingt, die einzig mögliche kubische Fläche dieser Art auszusondern.

1.

Wir erfassen die Strahlen des auf kartesische Koordinaten $x = x_1 : x_0$, $y = x_2 : x_0$, $z = x_3 : x_0$ bezogenen Raumes analytisch durch ihre Plückerkoordinaten $p_1 : \ldots : p_6$, zwischen denen die Plückerrelation

$$\Omega(p) = 2\,(p_1\,p_4 + p_2\,p_5 + p_3\,p_6) = 0 \tag{1}$$

besteht. Bedeuten p_i und q_i die Plückerkoordinaten zweier Geraden, so gilt unter Verwendung der Bezeichnung

$$\Omega(p, q) = p_1 q_4 + p_2 q_5 + p_3 q_6 + p_4 q_1 + p_5 q_2 + p_6 q_3 \tag{2}$$

für ihren Abstand a [6, S. 100]

$$a = -\frac{\Omega(p, q)}{\sqrt{(p_2 q_3 - p_3 q_2)^2 + (p_3 q_1 - p_1 q_3)^2 + (p_1 q_2 - p_2 q_1)^2}} \tag{3}$$

und für ihren Winkel φ [6, S. 99]

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(p_2 q_3 - p_3 q_2)^2 + (p_3 q_1 - p_1 q_3)^2 + (p_1 q_2 - p_2 q_1)^2}}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\,\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}. \tag{4}$$

Hängen die Koordinaten p_i von einem Parameter t ab, so erfüllen die zugehörigen Raumgeraden eine Strahlfläche Φ, wobei (1) identisch in t gelten muß. Sind $p_i(t_0)$ und $p_i(t_0 + h)$ zwei Erzeugende von Φ, a ihr Abstand und φ ihr Winkel, so versteht man unter dem Drall d von Φ längs der Erzeugenden $t = t_0$

$$d = \lim_{h \to 0} \frac{a}{\varphi}. \tag{5}$$

Durch Differenzieren von (1) nach t erhält man

$$\Omega(p, p') = 0, \quad \Omega(p') + \Omega(p, p'') = 0 \tag{6}$$

und damit

$$\Omega(p(t_0), p(t_0 + h)) = -\frac{h^2}{2}\,\Omega(p') + (*). \tag{7}$$

Wir fassen (p_1, p_2, p_3) zu einem Vektor $\mathfrak{a}(t)$ zusammen, der die Richtung der Erzeugenden angibt und setzen

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}' = \mathfrak{z}; \tag{8}$$

$\mathfrak{z}(t)$ ist ein Vektor in Richtung der Zentraltangente. Aus (5) erhält man unter Verwendung von (3), (4) und (7)

$$d = \frac{\Omega(p')\,\mathfrak{a}^2}{2\,\mathfrak{z}^2}. \tag{9}$$

Eine windschiefe Strahlfläche enthält i. a. besondere Erzeugenden, vor allem Torsallinien, isotrope und zylindrische Erzeugenden, bei denen d die Werte 0 oder ∞ annimmt [5]. Damit Φ eine windschiefe Strahlfläche mit konstantem (jedoch von 0 und ∞ verschiedenem) Drall d sein kann, müssen diese besonderen Erzeugenden so beschaffen sein, daß für sie in (9) gleichzeitig Zähler und Nenner verschwinden und die

Anwendung der Regel von de l'Hôpital einen eigentlichen, von 0 verschiedenen Wert für d liefert. Aus (9) wird dadurch (wobei $\Omega, \Omega', \ldots$ stets für p' zu bilden ist):

$$d = \frac{\Omega' \mathfrak{a}^2 + 2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\Omega}{4\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}'} \tag{10}$$

bzw. bei zwei- und dreimaliger Anwendung dieser Regel

$$d = \frac{\Omega''\,\mathfrak{a}^2 + 4\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\Omega' + 2\,\mathfrak{a}'^2\,\Omega + 2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}''\,\Omega}{4\,\mathfrak{z}'^2 + 4\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}''} \tag{11}$$

$$d = \frac{\Omega'''\,\mathfrak{a}^2 + 6\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\Omega'' + 6\,\mathfrak{a}'^2\,\Omega' + 6\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}''\,\Omega' + 6\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}''\,\Omega + 2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'''\,\Omega}{12\,\mathfrak{z}'\,\mathfrak{z}'' + 4\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}'''}. \tag{12}$$

Betrachten wir zunächst nur eigentliche Erzeugenden von $\Phi(\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o})$, so verschwindet der Nenner in (9) in folgenden beiden Fällen: $\mathfrak{z} = \mathfrak{o}$, d. h. nach (8) $\mathfrak{a}' = \lambda\,\mathfrak{a}$ und die Erzeugende ist daher *zylindrisch*, oder $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{z}^2 = 0$, d. h. die zur Zentraltangente normale Ebene, die *asymptotische Ebene, ist isotrop*. Der Zähler in (9) verschwindet für $\Omega(p') = 0$, was nach (3) und (7) für eine *Torsallinie* charakteristisch ist, oder für $\mathfrak{a}^2 = 0$, d. h. bei einer *isotropen Erzeugenden*. Die Kombination dieser Fälle liefert nach (9), (10), (11) folgende bei windschiefen Strahlflächen konstanten Dralls mögliche, besondere eigentliche Erzeugenden:

1. $\mathfrak{z} = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}^2 \neq 0$, $\Omega(p') = 0$: nach (10) muß $\Omega'(p') = 0$ sein und nach (11)

$$d = \frac{\Omega''\,\mathfrak{a}^2}{4\,\mathfrak{z}'^2}. \tag{13}$$

Dieser Wert kann $\neq 0, \neq \infty$ sein. Die Erzeugende ist eine *zylindrische Erzeugende 2. Ordnung* [vgl. 5, S. 140].

2. $\mathfrak{z} = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}^2 = 0$, $\Omega(p') \neq 0$: Dieser Fall ist nicht möglich, da wegen $\mathfrak{z} = \mathfrak{o}$ nach (8) gilt $\mathfrak{a}' = \lambda\,\mathfrak{a}$ und damit $\Omega(p') = \lambda^2\,\Omega(p) = 0$.

3. $\mathfrak{z} = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}^2 = 0$, $\Omega(p') = 0$: Hier liefert (10) den i. a. brauchbaren Wert

$$d = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\Omega'}{\mathfrak{z}'^2}. \tag{14}$$

Diese Erzeugende ist eine *isotrope zylindrische Erzeugende*.

4. $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{z}^2 = 0$, $\mathfrak{a}^2 \neq 0$, $\Omega(p') = 0$: Aus (10) folgt

$$d = \frac{\mathfrak{a}^2\,\Omega'}{4\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}'}. \tag{15}$$

Die Erzeugende ist eine *nicht isotrope Torsallinie mit isotroper Torsalebene.*

5. $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{z}^2 = 0$, $\mathfrak{a}^2 = 0$, $\Omega(p') \neq 0$: In diesem Fall ist $\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}' = 0$, da

$$(\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}')^2 = \mathfrak{z}^2\,\mathfrak{z}'^2 - (\mathfrak{z} \times \mathfrak{z}')^2 = -[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}') \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}'')]^2 = \\ = -[(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}'')\,\mathfrak{a} - (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}'']^2 = 0, \tag{16}$$

so daß erst (11) den i. a. in Frage kommenden Wert liefert

$$d = \frac{2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\Omega' + \mathfrak{a}'^2\,\Omega + \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}''\,\Omega}{2\,\mathfrak{z}'^2 + 2\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}''}. \tag{17}$$

Die Erzeugende ist eine *isotrope Erzeugende mit isotroper asymptotischer Ebene.*

6. $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{z}^2 = 0$, $\mathfrak{a}^2 = 0$, $\Omega(p') = 0$: Wieder ist $\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}' = 0$ und nach (11)

$$d = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\Omega'}{\mathfrak{z}'^2 + \mathfrak{z}\,\mathfrak{z}''}. \tag{18}$$

Die Erzeugende ist eine *isotrope Torsallinie mit isotroper Torsalebene.*

Zusammenfassend kann gesagt werden:

Satz 1: *Damit eine windschiefe Strahlfläche konstanten Drall haben kann, ist notwendig (aber nicht hinreichend), daß*

a) *zu jeder ihrer nicht torsalen isotropen eigentlichen Erzeugenden eine isotrope asymptotische Ebene gehört und*

b) *jede ihrer eigentlichen Torsallinien entweder eine isotrope Torsalebene aufweist bzw. eine zylindrische Erzeugende mindestens 2. Ordnung oder eine isotrope zylindrische Erzeugende ist.*

Nun fehlen noch die uneigentlichen Erzeugenden ($\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$); für das Folgende genügt es, den Drall der reellen gewöhnlichen Fernerzeugenden und der reellen Ferntorsallinien 1. Ordnung mit eigentlicher Torsalebene zu betrachten. Für reelle Erzeugenden ist $\mathfrak{a}'$ nicht isotrop und wegen $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ gilt nach (8) $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}' = \mathfrak{o}$. Ist die Fernerzeugende nicht torsal, so ist $\Omega(p') \neq 0$ und daher auch $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{o}$ und nach (11) gilt $d = \infty$. Ist die Fernerzeugende torsal von 1. Ordnung ($\Omega(p') = 0$, $(\Omega(p') \neq 0)$ und die Fernebene nicht Torsalebene ($\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{o}$), so liefert (12) $d = \infty$.

Somit gilt der

Satz 2: *Die reellen nicht torsalen Fernerzeugenden haben stets unendlichen Drall. Gleiches gilt auch für jede Ferntorsallinie 1. Ordnung mit eigentlicher Torsalebene.*

2.

Eine *windschiefe reelle Strahlfläche 3. Grades* Φ enthält stets eine (reelle) Doppelgerade und ist daher rational. Sie besitzt zwei getrennte reelle oder konjugiert komplexe Torsallinien 1. Ordnung (*I.* bzw. *II.* Typus), deren Kuspidalpunkte auf der Doppelgeraden liegen, oder eine Torsallinie 2. Ordnung (*III.* Typus). Die Flächen vom *I.* und *II.* Typus sind in einem hyperbolischen Netz enthalten und besitzen daher auch eine reelle einfache Leitgerade, die vom *III.* Typus (Cayleysche Flächen) liegen in einem parabolischen Netz[1]. — Wir denken nun die Parameterdarstellung so gewählt, daß die reellen Werte des Parameters t den reellen Erzeugenden von Φ entsprechen. Die rationale Fernkubik Φ_u von Φ, die zunächst irreduzibel sein soll, kann dann in der Form dargestellt werden:

$$x_0 = 0, \quad \varrho\, x_j = a_j t^3 + b_j t^2 + c_j t + d_j \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{19}$$

wobei a_j, b_j, c_j, d_j reelle Zahlen sind. Φ_u schneidet den absoluten Kegelschnitt i^2 in 6 Punkten, deren Parameterwerte sich berechnen aus

$$\varrho^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) =$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(t - t_1)(t - \bar{t}_1)(t - t_2)(t - \bar{t}_2)(t - t_3)(t - \bar{t}_3) = 0, \tag{20}$$

wobei $\bar{t}_j$ die konjugiert komplexe Zahl zu t_j bedeutet. Würde einer dieser Werte auf eine isotrope zylindrische Erzeugende führen, so hätte Φ_u in deren komplexen Fernpunkt eine Spitze; diese Spitze wäre dann die einzige Singularität von Φ_u und damit als Fernpunkt der reellen Doppelgeraden selbst reell. *Isotrope zylindrische Erzeugenden sind daher bei den gesuchten Flächen nicht möglich.* Sämtliche isotropen Erzeugenden müssen somit nach Satz 1 mit einer isotropen asymptotischen Ebene behaftet sein, d. h. Φ_u muß in jedem Fernpunkt einer isotropen Erzeugenden den absoluten Kegelschnitt mindestens von 1. Ordnung berühren. Jede Lösung von (20) ist daher mindestens eine Doppellösung und da die Werte t_j nicht reell sind, muß (20) die Gestalt haben

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(t - t_1)^3 (t - \bar{t}_1)^3 = 0. \tag{21}$$

Das bedeutet aber, daß *die reellen windschiefen kubischen Strahlflächen konstanten Dralls mit irreduzibler Fernkurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskulieren.*

---

[1] Bezüglich einer lehrbuchartigen Darstellung der Theorie der Strahlflächen 3. Grades vgl. [5, S. 174 ff.].

Nun fehlen noch die Fälle, in denen Φ_u zerfällt. Liegt keine Leitgerade von Φ in der Fernebene, so besteht Φ_u aus einem Kegelschnitt und einer gewöhnlichen reellen Erzeugenden oder einer reellen Torsallinie 1. Ordnung, deren Torsalebene eigentlich ist. Beide Fälle scheiden nach Satz 2 aus. Ist die doppelte Leitgerade von Φ uneigentlich, so besteht Φ_u außerdem aus einer gewöhnlichen reellen Erzeugenden oder einer reellen Torsallinie 1. Ordnung mit eigentlicher Torsalebene, oder es liegt eine Cayleysche Fläche vor, die die Fernebene längs der Doppelgeraden berührt. In diesem letzten, wegen Satz 2 allein noch zu betrachtenden Fall existiert außer der Doppelgeraden, die eine Torsallinie 2. Ordnung ist, keine weitere Torsallinie; die beiden eigentlichen nicht torsalen isotropen Erzeugenden besitzen jedoch keine isotropen asymptotischen Ebenen, wie es Satz 1 fordert. Schließlich kann Φ_u in die einfache Leitgerade und eine reelle Torsallinie 1. Ordnung mit eigentlicher Torsalebene oder zwei gewöhnliche Erzeugenden zerfallen. Der erste Fall ist wieder wegen Satz 2 unmöglich. Im zweiten Fall gibt es zwei isotrope Erzeugenden, die wegen der eigentlichen Doppelgeraden nicht zylindrisch sein können und — falls sie eigentlich sind — keine isotropen asymptotischen Ebenen besitzen; es bleibt also nur die Möglichkeit, daß die beiden isotropen Erzeugenden uneigentlich sind und den absoluten Kegelschnitt dort berühren, wo er die einfache Leitgerade schneidet. Diese Gestalt der Fernkurve einer kubischen Strahlfläche ist aber für das Plückerkonoid charakteristisch [5, S. 204ff.], das bekanntlich nicht konstant gedrallt ist. Es gibt also *keine reellen windschiefen kubischen Strahlflächen konstanten Dralls mit zerfallender Fernkurve.*

3.

Die nicht reduzible Fernkubik Φ_u von Φ hat die Darstellung (19) und muß den absoluten Kegelschnitt i^2

$$x_0 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{22}$$

doppelt oskulieren[2]. Wir bewegen das Koordinatensystem so, daß die gemeinsamen Punkte von Φ_u und i^2 in die absoluten Punkte $I, \bar{I}$ der $x_1 x_2$-Ebene fallen und außerdem der (stets reelle) Doppelpunkt D von Φ_u auf der Ferngeraden der Ebene $x_1 = 0$ liegt; D habe die Koordinaten $(0:0:1:a)$, wobei a reell und $\neq 0$ ist. Das Strahlbüschel um D ist

[2] Eine Behandlung dieser Flächen vom konstruktiven Standpunkt aus findet sich in [4] und [5, S. 234ff.].

dann eineindeutig auf die Punkte der rationalen Kubik Φ_u bezogen. Wir ordnen jedem Punkt P von Φ_u als Parameterwert t den Wert $x_1 : x_2$ des Schnittpunktes von $x_3 = 0$ mit dem P aus D projizierenden Strahl zu. Reellen Erzeugenden von Φ entsprechen dann reelle Werte von t. Zu den Punkten I und $\bar{I}$ gehören die Parameterwerte $t = \pm i$, zu dem von D verschiedenem Punkt von Φ_u auf $x_1 = 0$ der Wert $t = 0$. Da Φ_u durch Angabe von D und den beiden Schmiegelementen in I und $\bar{I}$ eindeutig bestimmt ist, ist Φ_u projektiv-symmetrisch zu $x_1 = 0$ und daher fällt der Punkt $t = \infty$ in $x_2 = x_3 = 0$. Diese Bedingungen sowie die Tatsache der Oskulation von Φ_u und i^2 in I und $\bar{I}$ liefert aus (19):

$$\begin{aligned} \varrho\, x_1 &= (1 + a^2)\, t^3 + (a^2 - 3)\, t \\ \varrho\, x_2 &= (a^2 + 3)\, t^2 + a^2 - 1 \\ \varrho\, x_3 &= 2\, a\, (t^2 + 1). \end{aligned} \tag{23}$$

Φ ist durch eine Projektivität zwischen Φ_u und der einfachen Leitgeraden l bestimmt, wobei der Schnittpunkt von Φ_u und l selbstentsprechend ist. Dieser Fernpunkt L von l soll zum Parameterwert $t = b$ gehören (der Fall $b = \infty$ ist für das Folgende ohne Belang). Durch Parallelverschiebung des Koordinatenkreuzes legen wir den Nullpunkt in jenen Punkt von l, der in der Projektivität dem Punkt $t = \infty$ auf Φ_u entspricht. Für l gilt dann die Parameterdarstellung

$$x = \lambda\, [(a^2 + 1)\, b^3 + (a^2 - 3)\, b],\quad y = \lambda\, [(a^2 + 3)\, b^2 + a^2 - 1],$$
$$z = \lambda\, 2\, a\, (b^2 + 1), \tag{24}$$

wobei die projektive Kopplung durch

$$\lambda(t - b) = c \tag{25}$$

beschrieben wird. Die reelle Konstante c hängt dabei von der Wahl der Einheitsstrecke ab. Damit lautet die *Parameterdarstellung der den absoluten Kegelschnitt doppelt oskulierenden kubischen Strahlflächen*[3]

$$\begin{aligned} &\varrho\, p_1 = (a^2 + 1)\, t^3 + (a^2 - 3)\, t,\ \varrho\, p_2 = (a^2 + 3)\, t^2 + c^2 - 1,\ \varrho\, p_3 = 2\, a\, (t^2 + 1), \\ &\varrho\, p_4 = -8\, a\, c\, (t + b),\ \varrho\, p_5 = 2\, a\, c\, [(a^2 + 1)\, (b^2 + 1)\, t^2 + 4\, b\, t + b^2 (a^2 + 1) + a^2 - 3], \\ &\varrho\, p_6 = -c\, \{(a^2 + 1)\, [b^2 (a^2 + 3) + a^2 - 1]\, t^2 - 8\, b\, t + (1 - a^2)\, [b^2 (a^2 + 1) + a^2 - 3]\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Wir suchen nun darunter die *konstant gedrallten Flächen*. Eine solche Fläche Φ besitzt zwei Torsallinien; da isotrope zylindrische Erzeugenden

[3] Bezüglich einer anderen Parameterdarstellung vgl. [4, S. 76].

nach 2 unmöglich sind, müssen nach Satz 1 entweder zwei nicht zylindrische Torsallinien mit isotropen Torsalebenen oder eine zylindrische Torsallinie 2. Ordnung vorliegen. Im ersten Fall schneiden sich die Ferngeraden der beiden isotropen Torsalebenen im reellen Fernpunkt L der einfachen Leitgeraden und wegen der projektiven Symmetrie von Φ_u und i^2 muß L auf $x_1 = 0$ liegen. Außerdem liegt L auf Φ_u und da L, solange keine zylindrische Erzeugende 2. Ordnung vorliegt, von D verschieden ist, muß L in den Punkt $t = 0$ der Kurve (23) fallen und besitzt daher die Koordinaten $(0 : 0 : (a^2 - 1) : 2a)$. In (25) und (26) ist daher $b = 0$ zu setzen. Die Gleichungen der aus L an i^2 legbaren Tangenten lauten

$$2a(a^2 + 1)x_1 \mp 4a^2 i x_2 \pm 2a i(a^2 - 1)x_3 = 0, \tag{27}$$

während die beiden restlichen Tangenten aus L an Φ_u die Gleichungen

$$4a x_1 \mp 2a\sqrt{(a^2+1)(a^2-3)}\, x_2 \pm (a^2-1)\sqrt{(a^2+1)(a^2-3)}\, x_3 = 0 \tag{28}$$

besitzen. Die Geraden (27) und (28) sind nur dann identisch, wenn

$$4a i : (a^2 + 1) = \sqrt{(a^2 + 1)(a^2 - 3)} \tag{29}$$

und somit

$$a^8 - 6a^4 + 8a^2 - 3 = (a^2 - 1)^3 (a^2 + 3) = 0 \tag{30}$$

gilt. Da a reell ist, kommt nur $a^2 = 1$ in Frage und Φ lautet dann nach (26)

$$\varrho p_1 = t(t^2 - 1),\ \varrho p_2 = 2t^2,\ \varrho p_3 = \pm(t^2 + 1),\ \varrho p_4 = \mp 4ct, \tag{31}$$
$$\varrho p_5 = \pm 2c(t^2 - 1),\ \varrho p_6 = 0.$$

Für diese Flächen ergibt sich aus (9)

$$d = \pm \frac{4c(t^2 + 1)^4}{5t^8 + 16t^6 + 18t^4 + 8t^2 + 1}; \tag{32}$$

sie sind also nicht konstant gedrallt[4].

Nun bleibt noch jener Fall, wo Φ eine zylindrische Erzeugende 2. Ordnung besitzt. Φ_u hat dann in D eine Spitze, was nur für $a^2 = 3$ zutrifft und damit entsteht aus (26)

$$\varrho p_1 = 2t^3,\ \varrho p_2 = 3t^2 + 1,\ \varrho p_3 = \pm\sqrt{3}(t^2 + 1),\ \varrho p_4 = \mp 4\sqrt{3}\, ct,$$
$$\varrho p_5 = \pm 4\sqrt{3}\, ct^2,\ \varrho p_6 = -4ct^2. \tag{33}$$

[4] Diese Fläche hat isotrope Torsalerzeugenden und ist unter den kubischen Strahlflächen dadurch ausgezeichnet, daß sie eine Ellipse als Striktionslinie besitzt [vgl. 3].

Daraus ergibt sich als Parameterdarstellung dieser Cayleyschen Flächen

$$x = \mu\, 2\, t^3,\quad y = \frac{2\,c}{t} + \mu(3\,t^2 + 1),\quad z = \pm\sqrt{3}\,\left[\frac{2\,c}{t} + \mu(t^2+1)\right]. \tag{34}$$

Aus (9) erhält man für ihren Drall

$$d = \pm\frac{2\,c}{\sqrt{3}}, \tag{35}$$

also einen konstanten Wert[5]. Zu verschiedenem Vorzeichen von $\sqrt{3}$ gehören Flächen, die zur $x_1\,x_2$-Ebene symmetrisch liegen und entgegengesetzt gleichen Drall besitzen; alle Flächen (34) sind zueinander ähnlich.

Satz 3: *Die einzige reelle windschiefe Strahlfläche 3. Grades mit konstantem Drall ist die den absoluten Kegelschnitt doppelt oskulierende reelle kubische Strahlfläche mit einer zylindrischen Erzeugenden 2. Ordnung.*

Literatur

[1] *H. Brauner*, Über Strahlflächen von konstantem Drall. Mh. Math. **63**, 101—111 (1959).

[2] *H. Brauner*, Eine Verallgemeinerung der Problems der Cesàrokurven. Math. Ann. **138**, 27—41 (1959).

[3] *J. Krames*, Die Regelfläche dritter Ordnung, deren Striktionslinie eine Ellipse ist. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **127**, 563—584 (1918).

[4] *J. Krames*, Die Regelflächen dritter Ordnung, deren unendlichferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **133**, 65—90 (1924).

[5] *E. Müller-J. Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie III. Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Deuticke (1931).

[6] *K. Zindler*, Liniengeometrie mit Anwendungen I. Sammlung Schubert XXXIV (1902).

[5] Daß diese Strahlfläche konstant gedrallt ist, findet sich schon in [5, S. 242], wo auch einige ihrer Eigenschaften beschrieben sind.

On Arithmetical Properties of Riemann Matrices

By

W. E. Jenner, Lewisburg, Pa., USA

(Received May 8, 1959)

The theory of complex multiplication on abelian varieties over the complex numbers can be formulated in terms of either algebraic geometry, abelian functions or Riemann matrices. It is a truism that the arithmetic of the endomorphism ring of a complex abelian variety depends on arithmetical properties of the coefficients of the corresponding Riemann matrix. This paper represents an attempt to give some preliminary indications on the nature of this dependence.

In most of the previous literature on Riemann matrices it has been customary to identify isogenous abelian varieties. The resulting theory concentrated on the structure of the multiplication algebra and this line of investigation reached its culmination in the important researches of *Albert*. However, it is important to distinguish between isogenous abelian varieties which are not isomorphic. The absence of this distinction in some of the earlier literature led, in particular, to confusion of the Picard variety with the Albanese variety (first and second Picard varieties in the terminology of the Italian geometers), a situation that was realized by *Conforto* [3] and has now been clarified by *Igusa* [5], *Weil* [9] and others. In the classical language of Riemann matrices, isomorphism and equivalence of Riemann matrices correspond respectively to isogeny and isomorphism of the associated abelian varieties. From the second point of view, the study of complex multiplication takes on a more arithmetical character, and is concerned with the arithmetic of the multiplication ring. The investigation is rendered difficult by the fact that this ring is in general a non-maximal order in the multiplication algebra; and about such orders very little is known (cf. [6]). However, these orders do provide some new invariants for abelian varieties. In particular they have a finite class number. The notion of class number of a non-maximal order is defined in [7] and the proof

of its finiteness for algebras over the field of rational numbers is given in [11]. Indeed this observation applies to abelian varieties over arbitrary fields since *Weil* has shown (cf. [10]) that even in the general case the multiplication ring is an order in a semisimple algebra over the field of rational numbers. The relation of this class number to other invariants of an abelian variety is an interesting problem worthy of further investigation.

The discriminant of the order provides another invariant and it is this which is the primary concern of the present study. The general problem considered here is that of determining the prime divisors of the discriminant from the Riemann matrix. This can be considered as a ramification problem, once this notion is extended appropriately to non-maximal orders. So far, it has been found possible to solve this problem completely only in certain special cases, in particular for elliptic functions, However, it is hoped that the results obtained may provide some clue to the underlying phenomena which at present are not clear.

It may be helpful to remark that in the case of elliptic functions the present problem is distinct from that of constructing class fields of imaginary quadratic fields by means of elliptic modular functions, even though in each case the crucial notion is ramification. The problem considered here is concerned with ramification from the rational integers to the multiplication ring, rather than from the latter to an extension field.

An outline of this paper was presented at the International Congress of Mathematicians, Edinburgh 1958.

1.

Let Z, Q, C, denote the ring of rational integers, the field of rational numbers and the field of complex numbers respectively. The set of matrices of degree n with coefficients in a ring R will be denoted by $[R]_n$. The transpose of a matrix M will be denoted by ${}^tM$. The identity matrix of appropriate degree required by the context will be denoted by I. Let C^g be the space of g complex variables.

A *Riemann matrix of genus* g is a g by $2g$ matrix Ω with complex coefficients for which there exists a skew-symmetric matrix P in $[Q]_{2g}$ such that

$$\Omega P {}^t\Omega = 0, \tag{1}$$

$$i\,\Omega\,P^{t}\,\overline{\Omega} \tag{2}$$

is a positive-definite hermitian matrix.

The matrix P is called a *principal matrix*; its coefficients can be chosen in Z.

Let Γ be the group (Z-module) of periods of the field of abelian functions associated with Ω. Then the complex torus $T = C^g/\Gamma$ is a complex abelian Lie group. Furthermore, T can be embedded in a one-to-one manner as a non-singular variety in a complex projective space of suitably high dimension, so that it becomes an abelian variety in the sense of *Weil* (cf. [8]). The *multiplication ring* $\mathfrak{O}$ of Ω is the ring of all matrices $M \in [Z]_{2g}$ for which there exists a matrix $\alpha \in [C]_g$ such that

$$\alpha\,\Omega = \Omega\,M. \tag{3}$$

The algebra $\mathfrak{A} = Q \cdot \mathfrak{O}$ is semisimple over Q (cf. [1]) and $\mathfrak{O}$ is an order in $\mathfrak{A}$; i. e. $\mathfrak{O}$ is a subring of $\mathfrak{A}$ containing the identity element of $\mathfrak{A}$ and a Q-basis of $\mathfrak{A}$, and is a finitely-generated Z-module. In general this order is non-maximal. It is a natural extension of the notion of ramification in maximal orders to say that a rational prime p *ramifies* in an order $\mathfrak{O}$ if p divides the discriminant of $\mathfrak{O}$, which in turn happens if and only if the residue-class algebra $\mathfrak{O} - p\mathfrak{O}$ is not semisimple (cf. [4], [6]).

The condition (2) implies that the mapping $M \to \alpha$ given by (3) is well defined and is a ring- and Z-module-isomorphism of $\mathfrak{O}$ into $[C]_g$. The matrices α that occur in (3) induce endomorphisms of the torus T and indeed all holomorphic endomorphisms of T are induced in this way (cf. [8]). These endomorphisms also induce in a natural manner mappings of the corresponding field of abelian functions into itself. The Riemann matrix Ω, or the torus T, is said to admit *complex multiplication* if the algebra $\mathfrak{A}$ has dimension greater than one.

Two Riemann matrices Ω and Ω^* are said to be *equivalent* if $\Omega^* = \alpha\,\Omega\,M$ where α is an invertible matrix in $[C]_g$ and M is a unimodular matrix in $[Z]_{2g}$. This notion of equivalence corresponds to isomorphism of the corresponding tori. The notion of isomorphism of Riemann matrices, which will not be used in this paper, corresponds to isogeny of the corresponding tori (cf. [2], [9]).

Every Riemann matrix is equivalent to one in the canonical form

$$\Omega = (\Delta^{-1}, iS), \tag{4}$$

where Δ is a diagonal matrix, diag $\{\beta_1, \ldots, \beta_g\}$, with $\beta_1, \ldots, \beta_g \in Z$ and $1 = \beta_1 \mid \ldots \mid \beta_g$ and S is a symmetric matrix in $[C]_g$ with positive-definite real part. This canonical form is not unique in general (cf. [2], [3]); it differs slightly from that used by *Conforto* in [2], but is derived easily therefrom.

2.

Theorem 1: *Let Ω be a Riemann matrix in canonical form* (4). *Let k be the field obtained by adjoining to Q the coefficients of S and the complex unit i. Let $\mathfrak{p}$ be the local prime ideal of a valuation of k. Suppose that*

$$\text{(i)} \quad S\,[Q]_g\,S \cap [Q]_g \neq (0),$$

$$\text{(ii)} \quad \Delta\,S \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Then Ω admits complex multiplication and $\mathfrak{p}$ must be the extension of a rational prime which divides the discriminant of $\mathfrak{O}$.

Proof: The transformation $\Omega \to \Delta\,\Omega = \Omega^*$ is an equivalence and Ω^* has the same multiplication ring $\mathfrak{O}$ as Ω. Set $T = \Delta S$ so that $\Omega^* = (I, iT)$. In the relation (3), split the matrix M into square blocks of degree g so that

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}.$$

Then relation (3) becomes
$(\alpha I, \alpha iT) = (M_{11} + iTM_{21}, M_{12} + iTM_{22})$. Therefore $\alpha = M_{11} + iTM_{21}$ and so $i(M_{11} + iTM_{21})\,T = M_{12} + iTM_{22}$. Re-arranging terms, this becomes

$$iM_{11}\,T - TM_{21}\,T = M_{12} + iTM_{22}. \tag{5}$$

The determination of $\mathfrak{O}$ consists in finding the set of matrices $M \in [Z]_{2g}$ such that equation (5) is satisfied. The condition (i) clearly implies the existence of a solution to (5) in which M is not a scalar multiple of the identity matrix. Therefore Ω^*, and so Ω, admits complex multiplication. Indeed one may choose M_{12} and $M_{21} \neq 0$ in $[Z]_g$ such that $-TM_{21}\,T = M_{12}$ and take M_{11} and $M_{22} = 0$. Since $T \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, it follows that $M_{12} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Since $M_{12} \neq 0$, it follows that $\mathfrak{p}$ must be the extension of a rational prime p and that $M_{12} \equiv 0 \pmod{p}$. If also $M_{21} \equiv 0 \pmod{p}$ then a common factor p could be cancelled out in M_{12} and M_{21}. Therefore it can be assumed that $M_{21} \not\equiv 0 \pmod{p}$. It follows that residue class algebra $\mathfrak{O} - p\mathfrak{O}$ contains a matrix of the form $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \underline{M}_{21} & 0 \end{pmatrix}$ with $\underline{M}_{21} \neq 0$. (The bar stands for reduction mod p.) Reducing

the equation (5) mod $\mathfrak{p}$, it is seen that every matrix in $\mathfrak{O} - p\mathfrak{O}$ has the form $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$. It follows that $\mathfrak{O} - p\mathfrak{O}$ is not semisimple and so p divides the discriminant of $\mathfrak{O}$ (cf. [6]). This completes the proof.

Remarks: (1) The final statement of the theorem is effectively contingent on the assumption (i), not just the existence of complex multiplication. This is easily seen by taking $A = I$ and S to be a scalar multiple of I where the scalar is an appropriate positive real number which is transcendental over Q. Then $\mathfrak{O} \cong [Z]_g$ and no rational prime ramifies in $\mathfrak{O}$.

(2) The condition (i) is admittedly artificial. It is satisfied, for instance, if (a): S has a rational row, or if (b): $g = 2$ and $\det S \neq 0$ in Q. Proof: (a) If the r^{th} row of S is rational, let N be the matrix with 1 in the r^{th} row and r^{th} column and zero elsewhere. Then SNS is a non-zero rational matrix. (b) In the case $g = 2$ and $\det S \neq 0$ in Q, take $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Then $SNS = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix}$ where $d = \det S$. It is easy to construct examples satisfying (b) but not (a). At the present time it seems very difficult to give satisfactory necessary and sufficient conditions on a Riemann matrix for the existence of complex multiplication.

(3) There is an essential difference in the cases $g = 1$ and $g > 1$. In the latter case there can be non-trivial complex multiplications with $M_{12} = M_{21} = 0$. This cannot occur if $g = 1$.

3.

For certain special cases, it is possible to settle the ramification problem completely. In particular, this can be done for elliptic functions.

Theorem 2: *Let $\Omega = (1, i\omega)$ be the Riemann matrix of an elliptic function field, where $\omega = \sigma + i\tau$ with σ, τ real and $\sigma > 0$. Then Ω admits complex multiplication if and only if σ^2, $\tau \in Q$. Let λ be the smallest strictly positive rational integer such that $\lambda(\sigma^2 + \tau^2)$ and $2\lambda\tau$ are rational integers. Then the rational primes which divide the discriminant of $\mathfrak{O}$ are exactly the prime divisors of $4\lambda^2\sigma^2$.*

Proof: Suppose $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{O}$. Then by (5), $im_{11}\omega - m_{21}\omega^2 = m_{12} + im_{22}\omega$. Replacing ω by $\sigma + i\tau$, this becomes $im_{11}(\sigma + i\tau) - m_{21}(\sigma^2 - \tau^2 + 2\sigma\tau i) = m_{12} + im_{22}(\sigma + i\tau)$ and so, equating real and imaginary parts, one obtains

$$m_{11}\,\sigma - 2\,m_{21}\,\sigma\,\tau = m_{22}\,\sigma, \tag{6}$$

and

$$-\,m_{11}\,\tau - m_{21}(\sigma^2 - \tau^2) = m_{12} - m_{22}\,\tau. \tag{7}$$

Since $\sigma \neq 0$, it follows from (6) that $m_{11} - m_{22} = 2\,m_{21}\,\tau$. If $m_{21} = 0$ then $m_{11} = m_{22}$ and by (7), $m_{12} = 0$. Therefore if Ω admits complex multiplication there must be a matrix $M \in \mathfrak{O}$ with $m_{21} \neq 0$. Then $\tau = (m_{11} - m_{22})/2\,m_{21}$ and so $\tau \in Q$. Substituting $m_{11} - m_{22} = 2\,m_{21}\,\tau$ in (7), one obtains $m_{21}(\sigma^2 + \tau^2) + m_{12} = 0$. Now M was chosen so that $m_{21} \neq O$. It follows that $\sigma^2 \in Q$. This shows that the condition $\sigma^2, \tau \in Q$ is necessary for Ω to admit complex multiplication. From considering equations (6) and (7) it is clear that this condition is also sufficient. Now suppose that these conditions are satisfied and that M is an element of $\mathfrak{O}$ with M not a scalar multiple of the identity matrix. Then M must be of the form $M = \begin{pmatrix} m_{11} & -(\sigma^2 + \tau^2)\,a \\ a & m_{22} \end{pmatrix}$ with with $\tau = (m_{11} - m_{22})/2\,a$ and $a \neq 0$ in Z. In particular, the matrix $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & -(\sigma^2 + \tau^2)\,\lambda \\ \lambda & -2\,\lambda\,\tau \end{pmatrix}$ is in $\mathfrak{O}$, where λ is chosen as in the statement of the theorem. The matrices I and M_0 form a minimal basis for $\mathfrak{O}$. To see this, suppose M is any element of $\mathfrak{O}$. If M is an integral multiple of the identity then it is contained in the Z-module spanned by I and M_0. Otherwise, it is of the form given above. Then $M - m_{11}\,I = \begin{pmatrix} 0 & -(\sigma^2 + \tau^2)\,a \\ a & b \end{pmatrix}$ with $b \in Z$. From the proof of the first part of the theorem, it follows that $b = -2\,a\,\tau$. Thus $M - m_{11}\,I = \begin{pmatrix} 0 & -(\sigma^2 + \tau^2)\,a \\ a & -2\,a\,\tau \end{pmatrix}$. By using Euclidean didision of λ into a, and recalling the choice of λ, it follows that a is an integral multiple of λ. This shows that I and M_0 form a minimal basis for $\mathfrak{O}$. It is then a routine matter to compute the discriminant of $\mathfrak{O}$ by using this minimal basis for the regular representation. Its value is $-4\,\lambda^2\,\sigma^2$. This completes the proof.

Remarks: From these results it is easy to show that the multiplication algebra is isomorphic to the imaginary quadratic field $Q(\sqrt{-4\,\lambda^2\,\sigma^2})$. Elliptic function fields provide simple examples of multiplication rings which are not maximal orders. Suppose, for instance, that $\omega^2 \in Z$. Then $\mathfrak{O}$ consists of ring of all matrices of the form

$\begin{pmatrix} a & -b\,\omega^2 \\ b & a \end{pmatrix}$ where $a, b \in Z$. Then $\mathfrak{O} \cong Z + Z \cdot \sqrt{-\omega^2}$. It is a classical result that this is a non-maximal order if $-\omega^2 = 1 \pmod 4$.

4.

The final case considered is that of Riemann matrices of arbitrary genus for which the matrix S in the canonical form is rational. To study this case it is convenient to introduce local devices. Let p be a rational prime and let Z_p denote the ring of rational numbers which are integral at p. If $\alpha\,\Omega = \Omega\,M$ with $\alpha \in [C]_g$ and $M \in [Z_p]_{2g}$, then the matrix M will be called a *p-multiplication*. The set of all such matrices form the *p-multiplication ring*. It is easy to check that this ring is exactly $Z_p \cdot \mathfrak{O}$. Two Riemann matrices Ω and Ω^* are said to be *p-equivalent* if $\Omega^* = \alpha\,\Omega\,M$, where $\alpha \in [C]_g$ is invertible and $M \in [Z_p]_{2g}$ with $\det M$ being a local unit at p. If $\mathfrak{O}_p$ and $\mathfrak{O}_p^*$ are the p-multiplication rings of Ω and Ω^* respectively, then $\mathfrak{O}_p^* = M^{-1}\,\mathfrak{O}_p\,M$. It follows that $\mathfrak{O}_p$ and $\mathfrak{O}_p^*$ have the same p-discriminant, as defined in [6].

Theorem 3: *Let Ω be a Riemann matrix in canonical form* (4) *with $S \in [Q]_g$. Let λ be the smallest strictly positive rational integer such that $\lambda\,\Delta\,S \in [Z]_g$. Then Ω admits complex multiplication and the rational primes dividing the discriminant of $\mathfrak{O}$ are exactly those dividing* $2\,\lambda \det(\lambda\,\Delta\,S)$.

Proof: The fact that Ω admits complex multiplication follows from the fact that condition (i) of theorem 1 is satisfied. Since S must be positive-definite, it follows that $\det S \neq 0$. Since Z is a principal ideal ring, it follows that there exist unimodular matrices $U, V \in [Z]_g$ such that $U\,\Delta\,SV$ is in diagonal form $T = \operatorname{diag}\{t_1, \ldots, t_g\}$. The mapping $\Omega \to \Delta(\Delta^{-1}, iS) \to U\,\Delta(\Delta^{-1}, iS)\begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = (I, iT)$ is an equivalence and so it can be assumed that Ω is already in this form. The proof proceeds in three steps.

(A) The matrix $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2\,T^2 \\ \lambda^2\,I & I \end{pmatrix}$ is in $\mathfrak{O}$. This is seen by examining equation (5) in the proof of theorem 1. If p is any prime divisor of λ then $\lambda^2\,I \equiv 0 \pmod p$ and $\lambda^2\,T^2 \not\equiv 0 \pmod p$ and so M_0 is nilpotent mod p. If M is any element of $\mathfrak{O}$ then $M \cdot M_0$ is also nilpotent mod p. (In checking this, the crucial step consists in equating the real and imaginary parts in equation (5), to conclude that $M_{11} = M_{22}$ for

any $M \in \mathfrak{O}$.) Thus $\mathfrak{O} - p\mathfrak{O}$ is not semisimple, and so p divides the discriminant of $\mathfrak{O}$.

(B) Suppose now that p is a prime at which all the coefficients of T are locally integral and that p divides locally some t_k where $1 \leq k \leq g$. Then there exist matrices $B, C \in [Z]_g$ such that $TBT = -C$ with $C \equiv 0 \pmod{p}$ and $B \not\equiv 0 \pmod{p}$. Examining equation (5) again, it follows that the matrix $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -C \\ B & 0 \end{pmatrix}$ is in $\mathfrak{O}$, and so M_1 is nilpotent mod p. As in the previous case, the matrix $M \cdot M_1$ is nilpotent mod p for any $M \in \mathfrak{O}$. It follows that $\mathfrak{O} - p\mathfrak{O}$ is not semisimple, and so p divides the discriminant of $\mathfrak{O}$.

(C) Finally, suppose that p is a prime for which all the t_k, $1 \leq k \leq g$, are local units. Then Ω is p-equivalent to (I, iI). The multiplication ring of this matrix is isomorphic to the ring of all matrices of degree g over the ring of Gaussian integers. To see this, observe that the matrix (I, iI) is equivalent to the matrix $\Omega^* = \begin{pmatrix} \Omega_1 & \cdot & \cdot & 0 \\ & 0 & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & \Omega_g \end{pmatrix}$ where each $\Omega_k = (1, i)$, $1 \leq k \leq g$. (This equivalence transformation is accomplished by changing columns.) From this, it follows by a procedure of Albert (cf. [1], proof of theorem 5) that the multiplication ring of Ω^* is the ring of all matrices of degree g with coefficients in the multiplication ring of Ω_1. It follows from the remarks after theorem 2 that this latter ring is isomorphic to the ring of Gaussian integers. It follows in this case that $p = 2$ is the only ramified prime. To summarize, the ramified primes are the poles of T, the zeros of T, and the prime $p = 2$. The final assertion of the theorem is equivalent to this statement.

References

[1] *A. A. Albert*, A note on the Poincaré theorem on impure Riemann matrices, Ann. of Math. **36**, 151—156 (1935).

[2] *F. Conforto*, Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, Berlin 1956.

[3] *F. Conforto*, Funzioni abeliane modulari, Rome 1951.

[4] *M. Deuring*, Algebren, Berlin 1935, New York 1948.

[5] *J.-I. Igusa*, On the Picard varieties attached to algebraic varieties, Amer. J. Math. **74**, 1—22 (1952).

[6] *W. E. Jenner*, Block ideals and arithmetics of algebras, Comp. Math. **11**, 187—203 (1953).

[7] *W. E. Jenner*, On the class number of non-maximal orders in p-adic division algebras, Math. Scand. **4**, 125—128 (1956).

[8] *A. Weil*, Introduction a l'étude des variétés kaehlériennes, Paris 1958.
[9] *A. Weil*, On Picard varieties, Amer. J. Math. **74**, 865—894 (1952).
[10] *A. Weil*, Variétés abéliennes et courbes algébriques, Paris 1948.
[11] *H. Zassenhaus*, Neuer Beweis der Endlichkeit der Klassenzahl bei unimodularer Äquivalenz endlicher ganzzahliger Substitutionsgruppen, Hamb. Math. Einzelschr. **12**, 276—288 (1938).

Sur certains problèmes et théorèmes concernant la continuité et la dérivabilité des fonctions

Par

Solomon Marcus, Bucarest

(Reçu le 13 Mai 1959)

Sur les fonctions continues dont tous les ensembles de niveau non vides sont infinis et dénombrables

A. Hajnál a posé le problème suivant: Existe-t-il une fonction réelle f, définie et continue sur l'intervalle compact $[0, 1]$ et telle que, pour tout t réel, l'ensemble de niveau t, $\{x; f(x) = t, 0 \leq x \leq 1\}$, soit vide ou infini et dénombrable? La réponse affirmative à ce problème est donnée par le théorème suivant, qui repose sur une communication orale de *C. Foias* [4]:

Théorème 1. *Il existe une fonction réelle f, définie et continue sur* $[0, 1]$, *avec* $0 \leq f(x) \leq 1$ *pour* $0 \leq x \leq 1$ *et telle que, pour tout* $t \in [0, 1]$, *l'ensemble* $\{x; f(x) = t, 0 \leq x \leq 1\}$ *soit infini et dénombrable.*

Démonstration. Désignons par $I_1^n, I_2^n, \ldots, I_p^n, \ldots, I_{2^n-1}^n$ les 2^{n-1} intervalles de $[0, 1]$ qu'on élimine à l'étape de rang n dans la construction de l'ensemble triadique de *Cantor*. Définissons une fonction f jouissant des propriétés suivantes: a) Sur l'ensemble de *Cantor* f coïncide avec la fonction bien connue, continue et croissante, de *Cantor*; b) sur $I_p^n (1 \leq p \leq 2^{n-1})$ f est une fonction polygonale telle que

$$f(I_p^n) = \left[\frac{p-1}{2^{n-1}}, \frac{p}{2^{n-1}}\right].$$

On constate ainsi que, pour chaque n, chaque valeur réelle comprise entre 0 et 1 est prise un nombre fini (> 0) de fois sur $J_n = \bigcup_{p=1}^{2^n-1} I_p^n$; donc tout ensemble de niveau $t \in [0, 1]$ est infini et dénombrable sur $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. D'autre part, la restriction de f sur l'ensemble K de *Cantor*

est une fonction strictement croissante, donc pour tout $t \in [0, 1]$ l'ensemble $\{x; f(x) = t, 0 \leq x \leq 1\}$ est infini et dénombrable sur $J \cup K = [0, 1]$.

En ce qui concerne la continuité de f au points de K, elle résulte du fait que l'oscillation de f sur I_p^n tend à zéro avec $1/n$ et de ce que la fonction de *Cantor* est continue. Sur $I_p^n (1 \leq p \leq 2^{n-1}, n = 1, 2, \ldots)$ f est aussi continue, car sa restriction sur I_p^n est une fonction polygonale.

Remarque. Si on remplace l'intervalle $[0, 1]$ par l'un des intervalles $(0, 1)$, $[0, 1)$ et $(0, 1]$ la démonstration du théorème est immédiate et banale. En effet, sur l'intervalle $(0, 1]$, par exemple, la fonction $\sin 1/x$ jouit des propriétés désirées.

Désignons par I un intervalle unidimensionnel quelconque (fermé ou ouvert, fini ou infini).

Que peut-on dire sur la structure des fonctions continues dont tous les ensembles de niveau sont dénombrables? Une réponse est donnée par le

Théorème 2. Si f est réelle et continue sur I et si chaque valeur $y \in f(I)$ est prise par f, sur I, une infinité dénombrable de fois, alors tout intervalle $J \subset I$ contient un sous intervalle où f est strictement monotone et il existe un ensemble P, fermé, partout non dense et contenu dans I, tel que $f(P) = f(I)$.

Démonstration. K. Padmavally a établi le théorème suivant:

Si f est continue sur I et si elle n'est monotone en aucun intervalle contenu dans I, alors les valeurs $t \in f(I)$ telles que l'ensemble $\{x; f(x) = t, x \in I\}$ soit au plus dénombrable forment un ensemble de première catégorie (au sens de *Baire*) [10]. Mais pour la fonction envisagée dans l'énoncé *toute* valeur de $f(I)$ est prise une infinité dénombrable de fois. Mais f étant continue et I étant un intervalle, $f(I)$ est aussi un intervalle. Cet intervalle ne se réduit pas à un seul point, car alors f serait constante sur I donc la valeur de cette constante serait prise sur I une infinité non dénombrable de fois. Mais on sait que tout intervalle qui ne se réduit pas à un seul point est un ensemble de deuxième catégorie. Il s'ensuit donc que tout intervalle $J \subset I$ contient un sous intervalle où f est strictement monotone.

Désignons par G la réunion des intervalles (ouverts) de monotonie de f. G est un ensemble ouvert et partout dense sur I. Donc l'ensemble $P = I - G$ est fermé et partout non dense sur I. Supposons, par réduction à l'absurde, qu'il existe une valeur $t \in f(I)$ qui ne soit pas prise par f sur P. Il existe donc une suite $\{x_n\}$ $(1 \leq n < \infty)$ de points appartenant à G et tels que $f(x_n) = t$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Désignons

par $\{I_n\}$ $(1 \leq n < \infty)$ une suite formée avec tous les intervalles contigus à P. Les intervalles I_n sont disjoints deux à deux et on a $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Deux points x_m et x_p de l'ensemble de niveau t ne peuvent pas appartenir à un même I_n, car f, étant strictement monotone sur I_n, prend chaque valeur au plus une fois sur I_n. Soit I_{p_n} tel que $x_n \in I_{p_n}$. Il y a un point ξ d'accumulation pour les intervalles I_{p_n} $(1 \leq n < \infty)$. Ce point ξ sera aussi un point d'accumulation pour les x_n $(1 \leq n < \infty)$, donc, à la suite de la continuité de f, on aura $f(\xi) = t$. D'autre part on a $\xi \in P$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que $P \cap \{x; f(x) = t\}$ est vide. Le théorème est ainsi démontré.

Corollaire. Il n'existe aucune fonction réelle f, continue sur $(0, 1)$, *telle que, pour chaque intervalle* $I \subset (0, 1)$, *chaque valeur* $y \in f(I)$ *soit prise sur* I *une infinité dénombrable de fois.*

Problème ouvert. Existe-t-il une fonction réelle f, définie, continue et non constante sur $[0, 1]$, *telle que tout ensemble de niveau de f soit vide ou parfait?*

Si la réponse au problème ci-dessus est négative, *existe-t-il une décomposition de* $[0, 1]$ *en* $2^{\aleph_0}$ *ensembles parfaits, disjoints et non vides?*

Remarque. L'existence d'une fonction réelle, définie et continue sur l'intervalle I et telle que l'ensemble $\{x; f(x) = t, x \in I\}$ soit parfait pour presque toutes les valeurs de $t \in f(I)$ est connue (voir, par exemple, [9]). On y montre que toute fonction continue dépourvue de dérivée jouit de cette propriété.

Propriétés liées à la classe de Baire des nombres dérivés d'une fonction continue

On sait que les nombres dérivés d'une fonction continue sont de classe 0, 1 ou 2 dans la classification de *Baire*. Il est aisé de voir que les seules fonctions continues dont un au moins des nombres dérivés est une fonction continue en chaque point sont les fonctions dérivables dont la dérivée est continue en chaque point. Il serait intéressant de donner une caractérisation similaire pour la classe des fonctions continues dont un au moins des nombres dérivés ou tous ces nombres sont de la première classe de *Baire*. Le même problème se pose pour les fonctions continues dont les nombres dérivés sont de la deuxième classe de *Baire*. Dans cet ordre d'idées on a les résultats partiels suivants:

Si les points de non dérivabilité d'une fonction f continue forment un ensemble N de deuxième catégorie dans chaque intervalle, alors: 1° *le*

complémentaire de N est de première catégorie; 2^0 *les nombres dérivés de f sont des fonctions de la deuxième classe de Baire.*

Démonstration. L'ensemble N des points de non dérivabilité de f est borelien (voir, par exemple, [1], p. 391). Il s'ensuit, d'après un théorème connu (voir, par exemple, [6]) que N jouit de la propriété de *Baire*, c'est-à-dire il est de la forme $(G - P_1) \cup P_2$ où G est ouvert tandis que P_1 et P_2 sont de la première catégorie dans tout intervalle. Il s'ensuit que N est un ensemble résiduel, c'est-à-dire son complémentaire est de la première catégorie.

Supposons maintenant, par réduction à l'absurde, qu'il existe un nombre dérivé de f, soit-il f^+, qui n'est pas une fonction de la deuxième classe de *Baire*. Comme la classe de f^+ ne peut pas être supérieure à 2, à la suite de la continuité de f, il s'ensuit que f^+ est de classe ≤ 1. Mais en vertu d'un théorème classique de *Baire*, les points de continuité d'une telle fonction forment un ensemble résiduel et, d'autre part, en vertu d'un théorème de *Dini* ([11], p. 204—206), f est dérivable en chaque point de R. Mais, N étant de deuxième catégorie (et même un ensemble résiduel, comme on a montré ci-dessus), l'ensemble $R \cap N$ n'est pas vide, ce qui est en contradiction avec la définition même des ensembles N et R.

Il s'ensuit donc que pour une fonction continue dont un au moins des nombres dérivés est de classe ≤ 1 l'ensemble des points de dérivabilité forment un ensemble de deuxième catégorie. Un résultat plus précis est le suivant:

Si f est continue et s'il existe un nombre dérivé de f qui est de classe ≤ 1 dans la classification de Baire, alors l'ensemble N des points de non dérivabilité de f est de la forme $A \cup B$, où A est de première catégorie et de mesure nulle tandis que B est partout non dense.

Démonstration. En vertu du théorème classique de *Baire*, il y a un nombre dérivé de f qui est continue en chaque point d'un ensemble résiduel R. D'après le théorème de *Dini* ([11], p. 204—206), f est dérivable en chaque point de R, donc N est de première catégorie. Pour chaque $x \in R$ il y a un intervalle I_x centré en x et tel que tous les nombres dérivés de f soient finis sur I_x. En effet, en vertu du même théorème de *Dini* que nous venons de citer, tous les nombres dérivés de f sont continues en x, donc finis sur I_x convenablement choisi. Faisons usage maintenant du théorème de *Denjoy* concernant la disposition des nombres dérivés d'une fonction continue quelconque; il s'ensuit que f est dérivable presque partout sur I_x. En effet, on a, presque partout

sur I_x, $f^+ = f_-$, $f^- = f_+$. Mais on a aussi $f_- \leq f^-$, donc $f^+ \leq f_+$ p. p. et, d'autres part, $f_+ \leq f^+$ donc $f^- \leq f_-$ p. p., donc $f^+ = f^- = f_- = f_+$ p. p. sur I_x.

Faisons maintenant usage du théorème de recouvrement de *Lindelöf* ([6], p. 131); on peut couvrir l'ensemble R avec une suite $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ d'intervalles tels que f soit dérivable presque partout sur chaque I_n, donc sur $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. De $R \subset G$ et de ce que G est un ensemble ouvert on déduit que le complémentaire B de G est partout non dense. Le théorème est démontré en désignant par A l'ensemble des points de G où f n'est pas dérivable et en tenant compte que N est de première catégorie.

Sur la relation $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$

I. Barbălat m'a communiqué le résultat suivant qu'il a utilisé dans un travail concernant la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires:

Si $\lim_{x \to \infty} f(x)$ existe et est finie et si $f'(x)$ est uniformément continue dans le voisinage de $+\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Pour établir ce fait, *I. Barbălat* a utilisé des considérations sur le module de continuité et sur l'intégrale. Nous nous proposons d'établir, par une voie tout à fait simple, le

Théorème 3. Soient a et λ deux nombres réels et f une fonction réelle dérivable sur (a, ∞) et telle que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lambda$. Supposons que la dérivée f' de f soit inférieurement sémicontinue sur (a, ∞). Alors, une condition suffisante pour que $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$ est que la sémicontinuité inférieure de f' soit uniforme sur (a, ∞):

Démonstration. Remarquons d'abord la propriété suivante: Si la semicontinuité inférieure de $f'(x)$ est uniforme sur (a, ∞), alors pour $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ qui ne dépend pas de x et tel que, de $0 < |\beta| < \eta$ il s'ensuit

$$f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+\beta) - f(x)}{\beta}.$$

En effet, il suffit de prendre, pour η, le même η qui figure dans la définition de la semicontinuité inférieure de $f'(x)$ sur (a, ∞). On utilise le théorème des accroissements finis et on obtient

$$\frac{f(x+\beta)-f(x)}{\beta}=f'(x+\theta\beta)$$

où $0\leq\theta\leq 1$. Il s'ensuit que $|x+\theta\beta-x|=|\theta\beta|<\eta$, donc en vertu de la semicontinuité inférieure, $f'(x)-\varepsilon<f'(x+\theta\beta)$ dès que $|\beta|<\eta$, ce qui est, compte tenu de l'égalité ci-dessus, justement l'inégalité désirée.

Admettons maintenant, par réduction à l'absurde, qu'il existe une suite $a<\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_n<\ldots\to+\infty$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} f'(\xi_n)=\mu\neq 0.$$

Soit, pour fixer les idées, $\mu>0$ et soit ε tel que $0<\varepsilon<\mu$. Il y a, d'après la remarque que nous venons de faire, un $\eta>0$ tel que

$$f'(\xi_n)-\varepsilon<\frac{f(\xi_n+\eta/2)-f(\xi_n)}{\eta/2} \text{ pour } n=1,2,3,\ldots \tag{1}$$

Mais

$$\lim_{n\to\infty}(f'(\xi_n)-\varepsilon)=\mu-\varepsilon>0$$

tandis que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_n+\eta/2)-f(\xi_n)}{\eta/2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(f(\xi_n+\eta/2)-f(\xi_n))}{\eta/2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n+\eta/2)-\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)}{\eta/2}=\frac{\lambda-\lambda}{\eta/2}=0.$$

On obtient ainsi une contradiction avec l'inégalité (1), ce qui démontre le théorème.

Dans le cas où $f'(x)$ est continue, on peut obtenir un théorème plus précis. Mais d'abord un lemme.

Lemme. Si f est continue sur (a,∞) et si $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lambda$, où λ *est fini, alors f est uniformément continue sur (a,∞).*

Démonstration. Admettons, par réduction à l'absurde, que la continuité de f n'est pas uniforme sur (a,∞). Il existe alors un $\varepsilon>0$ et deux suites $\{x_n^1\}$, $\{x_n^2\}$ telles que $a<x_n^1<\infty$, $a<x_n^2<\infty$, $|x_n^1-x_n^2|<1/n$ et $|f(x_n^1)-f(x_n^2)|\geqq\varepsilon$ pour $n=1,2,\ldots$. Les suites $\{x_n^1\}$, $\{x_n^2\}$ ne sont pas bornées, car dans ce cas f ne serait pas uniformément continue sur un certain intervalle compact contenu dans (a,∞), en contradiction avec l'hypothèse. On peut donc admettre que $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^1=\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2=\infty$ et,

en vertu de l'hypothèse, $\lim_{n\to\infty} | f(x_n^1) - f(x_n^2) | = | \lambda - \lambda | = 0$, en contradiction avec l'inégalité $| f(x_n^1) - f(x_n^2) | \geqq \varepsilon$, inégalité qui a lieu pour chaque n entier positif. La contradiction obtenue démontre le théorème.

Du lemme ci-dessus et du théorème 3 on déduit le

Théorème 4. Soient a et λ deux nombres réels et f une fonction réelle définie et ayant une dérivée continue sur (a, ∞) et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ est que la continuité de $f'(x)$ soit uniforme sur (a, ∞).

Remarque 1. Si $\lambda = \infty$, les théorèmes 3 et 4 ne sont plus vrais, comme le montre l'exemple de la fonction $f(x) = x^2$.

Remarque 2. L'uniformité de la continuité de $f(x)$ n'est pas une conséquence des autres hypothèses du théorème 4, comme le montre l'exemple suivant, communiqué par *I. Berstein*: $f(x) = (1/x) \sin x^2$. Ici on a $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f'(x)$ est continue sur $(1, \infty)$ mais $f'(x)$ n'a pas de limite.

Sur certains théorèmes de S. Četkovič et M. K. Fort Jr.

S. Četkovič a établi dans [2] le théorème suivant:

Si la fonction réelle f est définie sur $[0, 1]$ et si tout intervalle $I \subset [0, 1]$ contient au moins un point de continuité et au moins un point de discontinuité, alors l'ensemble X des points de $[0, 1]$ où f est continue mais dépourvue de dérivée finie est un ensemble partout dense sur $[0, 1]$.

La démonstration donnée par *S. Četkovič* est assez compliquée mais un résultat plus précis, à savoir que le complémentaire de X est de première catégorie, est contenu dans un théorème antérieur de *M. K. Fort* Jr., théorème dont la démonstration, bien que assez longue, n'est pas plus longue que celle du théorème de *S. Četkovič*. Voici ce théorème [5]:

Soit f une fonction réelle, définie sur $[0, 1]$, et supposons que tout intervalle compris dans $[0, 1]$ contient un point de discontinuité de f. Dans ce cas, les points de $[0, 1]$ où la dérivée de f existe et est finie forment un ensemble de première catégorie.

Pour obtenir de ce théorème le résultat de *S. Četkovič* il suffit de tenir compte que, dans les hypothèses de cet auteur, l'ensemble des points de discontinuité, qui est en tout cas du type borelien F_σ, est de

première catégorie (car il est un ensemble frontière), donc X, comme intersection de deux ensembles résiduels, à savoir l'ensemble des points de continuité et celui des points de non dérivabilité, est aussi un ensemble résiduel.

Mais le théorème de *M. K. Fort Jr.* est, à son tour, une conséquence rapide d'un théorème qui lui est antérieur, à savoir celui de *A. Broudno* [1]:

Pour que P soit l'ensemble des points de discontinuité d'une certaine fonction réelle f et Q soit l'ensemble des points où la même fonction est dépourvue de dérivée finie, il faut et il suffit que

1° P soit du type F_σ;

2° Q soit la réunion d'un G_δ avec un $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle;

3° Il existe un ensemble R du type G_δ tel que $P \subset R \subset Q$.

Pour déduire de ce théorème le théorème de *M. K. Fort* Jr. il suffit de remarquer que, en vertu du théorème de *A. Broudno*, il existe un ensemble R du type G_δ, tel que, en désignant par D l'ensemble des points de discontinuité de f et par Δ l'ensemble des points de dérivabilité de f, on ait $D \subset R \subset [0, 1] - \Delta$. D étant, par hypothèse, partout dense sur $[0, 1]$, R est aussi partout dense sur $[0, 1]$. Mais il est aisé de voir qu'un ensemble du type G_δ, partout dense sur $[0, 1]$, est un résiduel, donc Δ est de première catégorie.

Problème. Dans les hypothèses du théorème de *M. K. Fort* Jr. peut-on affirmer que l'ensemble des points de $[0, 1]$ où la dérivée de f existe et est infinie forment un ensemble de première catégorie? (Pour une réponse partielle à ce problème voir le théorème 2 de [7]).

Sur deux théorèmes de R. Vaidyanathaswamy

R. Vaidyanathaswamy a signalé les deux propriétés suivantes: [14]:

1) Si f est continue sur $[a, b]$ alors, à l'exception possible d'un ensemble dénombrable de valeurs de t, l'ensemble $\{x; f(x) = t, a \leq x \leq b\}$ est de mesure nulle au sens de *Lebesgue*.

2) Si f est continue sur $[a, b]$ et si, pour un certain $\xi \in [a, b)$, on a $f^+(\xi) > 0 > f_+(\xi)$, alors f est oscillatoire à droite du point ξ et ξ est un point d'accumulation pour l'ensemble $\{x; f(x) = f(\xi)\}$.

La propriété 1) est bien connue non seulement pour les fonctions continues mais même pour les fonctions mesurables définies sur R^n. Si f est borelienne, alors on peut préciser la propriété 1 de la manière suivante:

Si f est borelienne sur l'ensemble borelien E, alors à l'exception possible d'un ensemble dénombrable de valeurs de t, l'ensemble $\{x; f(x) = t, x \in E\}$ est de première catégorie.

Démonstration. Puisque toute fonction borelienne jouit de la propriété de *Baire* (voir, par exemple, [6], p. 306) les ensembles $N_t = \{x; f(x) = t, x \in E\}$ jouissent de la propriété de *Baire*. Si les valeurs t telles que N_t soit de deuxième catégorie formaient un ensemble H non dénombrable, alors, en tenant compte que les ensembles N_t sont disjoints, on déduirait l'existence d'une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de *Baire* et contenus dans E. Mais cela est impossible car chaque ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de *Baire*, est un ensemble résiduel (c'est-à-dire dont le complémentaire est de première catégorie) par rapport à une certaine sphère et pour $t' \neq t''$, $t' \in H$, $t'' \in H$ les sphères où $N_{t'}$ et $N_{t''}$ sont des résiduels sont disjoints. D'autre part, on sait qu'une famille de sphères disjointes est toujours dénombrable.

Remarque. De la démonstration donnée ci-dessus il s'ensuit que cette propriété reste valable pour tout espace métrique séparable.

Nous allons montrer maintenant que la propriété 2 est vraie pour toute fonction jouissant de la propriété de *Darboux*.

Si la fonction réelle f jouit de la propriété de Darboux sur $[a, b]$ et si $a \leq \xi < b$ et $f^+(\xi) > 0 > f_+(\xi)$, alors f est oscillatoire à droite du point ξ et ξ est un point d'accumulation pour l'ensemble $\{x; f(x) = f(\xi)\}$.

Démonstration. De $f^+(\xi) > 0$ on déduit l'existence d'une suite $x_n \downarrow \xi$ et telle que $f(x_n) > f(\xi)$ pour chaque n entier positif. De $f_+(\xi) < 0$ on déduit l'existence d'une suite $y_n \downarrow \xi$ et telle que $f(y_n) < f(\xi)$ pour chaque n entier positif. Cela veut dire que, dans tout voisinage droite du point ξ, la fonction f prend une infinité de fois des valeurs supérieures à $f(\xi)$ et une infinité de fois des valeurs inférieures à $f(\xi)$. Mais, en vertu de la propriété de *Darboux* de la fonction f, il existe sur $[x_n, y_n]$ un point z_n tel que $f(z_n) = f(\xi)$, quel que soit n entier positif. Donc ξ est un point d'accumulation pour l'ensemble $\{x; f(x) = f(\xi)\}$.

Sur un théorème de H. M. Sengupta et B. K. Lahiri concernant les points où un au moins des nombres dérivés est infini

Afin d'apporter une précision au théorème de *M. K. Fort* Jr. de [5], *H. M. Sengupta* et *B. K. Lahiri* ont donné le théorème suivant:

Si pour une fonction réelle f définie sur $[a, b]$ chaque sous-intervalle de $[a, b]$ contient au moins un point de continuité et au moins un point

de discontinuité, alors les points où f est continue et un moins des nombres dérivés de f est infini forment un ensemble résiduel sur $[a, b]$ [12].

La démonstration donnée par *H. M. Sengupta* et *B. K. Lahiri* est assez longue et minutieuse. Nous allons montrer ici que la démonstration même du théorème de *M. K. Fort* Jr. fournit le résultat de *H. M. Sengupta* et *B. K. Lahiri* et même un résultat un peu plus général. En effet, dans [5] *M. K. Fort* Jr. montre, entre autres, que pour toute fonction réelle définie sur $[a, b]$ et dont les points de discontinuité forment un ensemble partout dense sur $[a, b]$, en désignant par H_n l'ensemble des points x tels qu'on peut trouver

$$y \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}), \quad z \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$$

avec la propriété

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \frac{f(z) - f(x)}{z - x} > 1,$$

l'ensemble $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ est un ensemble résiduel sur $[a, b]$. Mais une inspection sommaire de la démonstration montre qu'on peut remplacer la valeur 1, dans la partie droite de l'inégalité ci-dessus, par un nombre positif quelconque et cela sans modifier la conclusion. Désignons par H^p l'ensemble H qui correspond à la valeur entière p de ce nombre positif. De ce que H^p est un ensemble résiduel pour chaque entier positif p il s'ensuit que l'ensemble $K = \bigcap_{1}^{\infty} H^p$ est aussi un résiduel sur $[a, b]$. D'autre part, de la définition même de l'ensemble K il s'ensuit qu'en chaque point de K un au moins des nombres dérivés de f est infini. Ona donc le

Théorème 5. Si les points de discontinuité de f forment un ensemble partout dense sur $[a, b]$ alors les points où un au moins des nombres dérivés de f est infini forment un ensemble résiduel sur $[a, b]$.

Ce théorème contient le résultat de *H. M. Sengupta* et *B. K. Lahiri* car si l'ensemble des points de continuité est partout dense alors cet ensemble, étant du type G_δ, est aussi un ensemble résiduel.

Sur une notion introduite par Burnett Meyer

D'après *Burnett Meyer* on dit qu'une fonction réelle f, définie sur l'ensemble réel E, est *restreinte* au point a d'accumulation pour E si $\limsup_{x \to a} f(x)$ et $\liminf_{x \to a} f(x)$ sont finies [8]. *Burnett Meyer* montre que

si l'ensemble $E' \subset E$ des points où f est restreinte est partout dense dans E alors l'ensemble $E - E'$ est partout non dense dans E.

On sait que dans un espace topologique tout ensemble frontière et fermé est partout non dense. En tenant compte de ce fait, la propriété donnée par *B. Meyer* est une conséquence de la propriété suivante, dont la démonstration est immédiate:

Si la fonction réelle f est définie dans l'espace métrique E, alors les ensembles

$$\{\xi; \limsup_{x \to \xi} f(x) = +\infty\} \text{ et } \{\xi; \liminf_{x \to \xi} f(x) = -\infty\}$$

sont fermés.

On voit ainsi que la propriété de *Burnett Meyer* est vraie non seulement pour les fonctions de variable rèelle, mais pour les fonctions définies dans un espace métrique.

Soit F un ensemble réel, fermé et partout non dense. On peut définir une fonction réelle f de variable réelle, telle que f soit restreinte aux points et seulement aux points étrangers à F. Soit, pour cela, (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), ... les intervalles contigus à F. Posons

$$f(x) = \frac{1}{x - a_n} + \frac{1}{b_n - x} \text{ si } a_n < x < b_n, \; f(x) = 0 \text{ si } x \in F.$$

La fonction f ainsi définie est restreinte seulement aux points étrangers à F.

M. Cotlar, dans son référat concernant la note de *Burnett Meyer* [3], signale l'analogie entre la notion de "fonction restreinte" et celle de "fonction apparentée (cliquiss)" de *H. Thielman* [13]. Une fonction f définie dans un espace métrique E et prenant les valeurs dans l'espace métrique E' est apparentée au point $x \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$ et toute sphère ouverte S contenant x, il existe une sphère $S_1 \subset S$ telle que $\varrho(f(y), f(z)) < \varepsilon$ dès que $y \in S_1$ et $z \in S_1$. Pour justifier l'analogie signalée par *M. Cotlar*, nous allons établir la propriété suivante:

Si les points de E où f est apparentée forment un ensemble partout dense dans E alors les points où une au moins des limites extrêmes est infinie forment un ensemble partout non dense.

Pour démontrer cela, soit une sphère ouverte $S \subset E$. Il existe un point $x \in S$ où f est apparentée. Il y a donc, pour $\varepsilon > 0$, une sphère $S_1 \subset S$, telle que $\varrho(f(y), f(z)) < \varepsilon$ pour $y \in S_1$, $z \in S_1$. Il s'ensuit que l'oscillation de f dans S_1 est $\leq \varepsilon$, donc que les points de E où l'oscillation de f est $> \varepsilon$ forment un ensemble partout non dense. Ceci entraîne

que les points où une au moins des limites extrêmes de f est infinie forment aussi un ensemble partout non dense.

Cependant, l'analogie entre ces notions ne va pas trop loin. Par exemple:

Les points de discontinuité où une fonction est restreinte peuvent former un ensemble de deuxième catégorie (comme le montre la fonction de Dirichlet), tandis que les points de discontinuité où une fonction est apparentée forment toujours un ensemble de première catégorie.

En effet, désignons par C l'ensemble des points où f est apparentée et par D l'ensemble des points de discontinuité de f. Dans chaque sphère où C est dense, D et, à plus forte raison, $C \cap D$, sont de première catégorie, en vertu de ce que, comme on a montré ci-dessus, les points où l'oscillation est $> \varepsilon$ (> 0) forment un ensemble partout non dense. Donc $C \cap D$ est de première catégorie par rapport à E.

Ajouté à la correction des epreuves: Le théorème 1 a été établi antérieurement par *W. Sierpiński* (Publ. Math. Univ. Belgrade 6/7 (1938), p. 84—85).

Ouvrages cités

[1] *A. Broudno*: Continuité et différentiabilité (en russe), Matem. Sbornik 13 (1943), p. 119—134.

[2] *S. Cetkovic*: Un théorème de la théorie des fonctions, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 245 (1957), p. 1692—1694.

[3] *M. Cotlar*: Math. Reviews, 1955, p. 1092.

[4] *C. Foias*: Communication orale, Novembre, 1958.

[5] *M. K. Fort Jr.*: A theorem concerning functions discontinuous on a dense set, Amer. Math. Monthly (1951), June-July.

[6] *C. Kuratowski*: Topologie I, Warszawa-Wroclaw, 1948.

[7] *S. Marcus*: Points de discontinuité et points de dérivabilité (en russe), Revue de Math. pures et appliquées, 2 (1957), p. 471—474.

[8] *B. Meyer*: On restricted functions, Amer. Math. Monthly 62 (1955), p. 29—30 (cité d'après Math. Reviews, 1955, p. 1092).

[9] *S. Minakshisundaram*: On the roots of a continuous non-differentiable function, Journ. Indian Math. Soc., 1940, 4, 31—33.

[10] *K. Padmavally*: On the roots of equation $f(x)=\xi$ where $f(x)$ is real and continuous in (a, b) but monotonic in no subinterval of (a, b), Proceed. Amer. Math. Soc. 4 (1953), p. 839—841.

[11] *S. Saks*: Theory of the integral, Warszawa-Lwow, 1937.

[12] *H. M. Sengupta-B. K. Lahiri*: A note on derivatives of a function, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society 49, 4 (1957), p. 189—191.

[13] *H. Thielman*: Types of functions, Amer. Math. Monthly 60 (1953), p. 156—161.

[14] *R. Vaidyanathaswamy*: On continuous functions of a real variable, Proceed. Indian Acad. Sci., Sect. A, 9 (1939), p. 67—71.

Institutul de Matematica al Academiei R. P. R., Bucarest.

Über die Verteilung der Extremstellen halbstetiger Funktionen

Von

Othmar Zaubek, Wien

(Eingegangen am 10. Juni 1959)

Es soll hier der bekannte Satz[1], wonach die Menge der eigentlichen Extremstellen einer reellen Punktfunktion mit separablen metrischen Erklärungsbereich abzählbar ist, durch einige Entwicklungen ergänzt werden, welche sich auf die Menge der lokalen (eigentlichen und uneigentlichen) Extremstellen halbstetiger Funktionen beziehen.

Zu diesem Zwecke verwenden wir die folgenden Ausdrucksweisen:

Erklärung. Ist f/A eine reelle Punktfunktion, deren Erklärungsbereich A eine quasimetrische[2] Punktmenge ist und ist p ein beliebiger Punkt von A, so heiße die obere Grenze $\bar{m}$, bzw. $\underline{m}$ aller reellen Zahlen m, welche die Eigenschaft haben, daß für jeden Punkt $x \in A$, dessen Entfernung $\delta(p, x)$ von p nicht größer als m ist, $f(x) \leq f(p)$, bzw. $f(x) \geqq f(p)$ ist, der Maximumradius $\bar{m}(f/A; p)$ bzw. der Minimumradius $\underline{m}(f/A; p)$ von f/A in p.

Aus dieser Erklärung ergibt sich sogleich, daß f/A dann und nur dann im Punkte p von A ein lokales (globales) Maximum bzw. Minimum hat, wenn $\bar{m}(f/A; p) > 0 \,(= +\infty)$ bzw. $\underline{m}(f/A; p) > 0 \,(= +\infty)$ ist.

Ordnen wir jedem Punkte $x \in A$ den Wert $\bar{m}(f/A; x)$ zu, so erhalten wir eine auf A erklärte eindeutige reelle Funktion $\bar{m}(f/A; A)$, welche wir die Maximumradiusfunktion von f/A nennen wollen. Entsprechend erklären wir die Minimumradiusfunktion $\underline{m}(f/A; A)$ von f/A.

Der kürzeren Ausdrucksweise halber verstehen wir im folgenden unter einer Punktfunktion f/A schlechthin eine reelle eindeutige Punktfunktion, deren Erklärungsbereich A eine Punktmenge eines quasimetrischen Raumes ist.

Es gilt nun der

[1] M. vgl.: *H. Hahn*, Reelle Funktionen, Leipzig 1932, S. 181. Satz 25. 4. 1.

[2] Wegen des hier verwendeten Begriffes quasimetrischer Raum vgl. m.: *G. Nöbeling*, Grundlagen der analytischen Topologie, Berlin 1954, S. 50.

Satz 1. Ist die Punktfunktion f/A in $p \in A$ nach oben (unten) halbstetig, so ist $\bar{m}(f/A; A)$ ($\underline{m}(f/A; A)$) in p nach oben halbstetig.

Beweis. Wir beweisen den Satz, indem wir zeigen: Ist $\bar{m}(f/A; A)$ ($\underline{m}(f/A; A)$) nicht nach oben halbstetig in p, so ist f/A in p nicht nach oben (unten) halbstetig.

Ist nämlich $\bar{m}(f/A; A)$ nicht nach oben halbstetig in p, so gibt es ein $\sigma > 0$ und in jeder Umgebung von p einen Punkt q, für welchen $\bar{m}(f/A; q) > \bar{m}(f/A; p) + \sigma$ ist. Nach der Erklärung von $\bar{m}(f/A; p)$ gibt es einen Punkt $a \in A$, so daß $\bar{m}(f/A; p) \leq \delta(a, p) \leq \bar{m}(f/; p) + \frac{\sigma}{2}$ und $f(a) > f(p)$ ist. Setzen wir $f(a) - f(p) = d$, so gibt es wegen der Entfernungsungleichung in jeder Umgebung von p einen Punkt $q' \in A$, so daß $\delta(a, q') < \bar{m}(f/A; p) + \sigma$ und $f(q') \geqq f(a) = f(p) + d$ ist. Da $d > 0$ ist, heißt dies aber, f/A ist in p nicht nach oben halbstetig. Ganz entsprechend beweist man, daß, wenn $\underline{m}(f/A; A)$ in p nicht nach oben halbstetig ist, f/A in p nicht nach unten halbstetig ist.

Die Umkehrung des Satzes 1 gilt nicht, selbst dann nicht, wenn $\bar{m}(f/A; A)$ nur den Wert Null annimmt, wie man mit Hilfe der bekannten Lebesgueschen Funktion $f(x)$, welche in jedem offenen, nicht leeren Teilintervall ihres Erklärungsbereiches jeden endlichen reellen Wert annimmt, sogleich erkennt. Dagegen ist in jedem Punkt p von A, in welchem $\bar{m}(f/A; p) \neq 0$ ($\underline{m}(f/A; p) \neq 0$) ist f/A nach oben (unten) halbstetig und daher ist für jede Punktfunktion f/A sowohl die Maximum- als auch die Minimumradiusfunktion derselben in jedem Punkte von A, in welchem sie von Null verschieden ist, nach oben halbstetig.

Aus dem Satz 1 folgern wir nun den in Aussicht genommenen Satz über die Verteilung der Extremstellen halbstetiger Funktionen.

Satz 2. Ist die Punktfunktion f/A nach oben (unten) halbstetig und ist A_i der isolierte Teil des Erklärungsbereiches A von f, so ist die Menge M aller lokalen Maximalstellen (Minimalstellen) von f/A eine Obermenge von A_i und eine F_σ = Menge in A, d. h. also die Vereinigungsmenge von (höchstens) abzählbar vielen in A abgeschlossenen Mengen.

Beweis. Zunächst ist sogleich zu sehen, daß $M \supseteq A_i$ ist. Da nun f/A nach den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes nach oben halbstetig ist, ist nach dem Satz 1 $\bar{m}(f/A; A)$ nach oben halbstetig. Nach einem bekannten Satze[3] über halbstetige Funktionen ist daher für jedes natürliche n die Menge $A_n = A[\bar{m} \geqq n^{-1}]$, d. h. die Menge aller

[3] M. vgl. das bei [1] genannte Buch, S. 298, Satz 36. 2. 1.

und nur der Punkte von A, in welchen $\bar{m} = \bar{m}(f/A; A) \geqq n^{-1}$ ist, abgeschlossen in A. Ist p eine beliebige lokale Maximalstelle von f, so ist $\bar{m}(f/A; p) > 0$ und daher ist für fast alle n p Punkt von A_n. Ist umgekehrt q ein Punkt von A_n für ein natürliches n, so ist nach der Erklärung von A_n $\bar{m}(f/A; q) > 0$ und daher hat f/A in q ein lokales Maximum. M ist daher die Vereinigungsmenge aller A_n und hat daher die im Satze behaupteten Eigenschaften. Ganz entsprechend verläuft der Beweis für die entsprechende Behauptung, wenn f/A nach unten halbstetig ist.

Man kann leicht nicht nach oben halbstetige Punktfunktionen f/A bilden, für welche die Menge M aller lokalen Maximumstellen kein F_σ im Erklärungsbereich A ist. Dazu betrachten wir z. B. die Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen, welche für jedes rationale x den Wert Null und für jedes irrationale x den Wert eins hat. Dann ist $f(x)$ mit Ausnahme der abzählbar unendlichen Menge der rationalen Zahlen halbstetig nach oben und doch ist die Menge M aller Maximalstellen von $f(x)$ kein F_σ im kartesischen R_1. Denn M ist die Menge aller irrationalen Punkte des R_1 und diese ist nach einem bekannten Satze von *W. H. Young*[4] kein F_σ im R_1.

Auch braucht die Menge aller lokalen Extremstellen selbst bei einer beliebig oft differenzierbaren Funktion einer reellen Veränderlichen nicht abgeschlossen zu sein, wie das Beispiel $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x}$ für $x < 0$ und $f(x) = 0$ für $x \geqq 0$ zeigt. Ist dagegen $a(x)$ eine auf A analytische, nicht konstante Funktion der reellen Veränderlichen x und ist A zusammenhängend, so hat die Menge aller Extremstellen von $a(x)$ keine Häufungsstelle in A.

Ist A die Menge des kartesischen R_1, welche aus dem Punkte 0 und den Punkten $\pm n^{-1}$ für $n = 1, 2, \ldots$ besteht und ist f/A die Funktion auf A, welche in $x \in A$ den Wert x hat, so ist f/A stetig und f hat in $x = 0$ kein lokales Extrem. Dieses Beispiel zeigt, daß im Satze 2 der isolierte Teil A_j von A nicht durch den separierten Teil A_s von A oder auch nicht durch die Vereinigungsmenge aus der ersten und zweiten Adhärenz von A ersetzt werden kann.

Aus diesen Beispielen ergibt sich, daß der Satz 2 bei der Verwendung der bisher gebrauchten Begriffe, wie halbstetig, abgeschlossen, F_σ abzählbar, nicht allgemein verschärft werden kann. Man kann diesen

[4] M. vgl. z. B. *Hausdorff*, Mengenlehre, Berlin u. Leipzig, 1935, S. 136, Satz VIII u. S. 138.

Satz jedoch formal noch etwas allgemeiner formulieren, indem man von einer beliebigen Punktfunktion ausgeht. Ist f/A diese Punktfunktion und $A^{(h)}$ die Menge aller Punkte von A, in welchen f nach oben (unten) halbstetig ist, so ist eben $MA^{(h)}$ ein F_σ in $A^{(h)}$. Anderseits kann man jedoch diese Entwicklungen dadurch verallgemeinern, daß man die entsprechenden Begriffe bei Vernachlässigung geeigneter Mengen verwendet. Ist f/A eine Punktfunktion und $\mathfrak{S}$ ein Mengensystem von Teilmengen von A, so kann man sagen f habe in p ein lokales $\mathfrak{S}$-Maximum, wenn es eine Umgebung U von p und eine Menge S aus $\mathfrak{S}$ gibt, so daß für jeden Punkt $x \in AU - S$ $f(x) \leq f(p)$ ist. Die entsprechenden Begriffe für die Stetigkeit bzw. Halbstetigkeit usw. bei Vernachlässigung von Mengen sind bekannt. Mit Hilfe dieser Begriffe erhält man dann ganz entsprechend einen Satz über die Menge aller lokalen $\mathfrak{S}$-Maximumstellen für die nach oben $\mathfrak{S}$-halbstetigen Funktionen usw. Die Einzelheiten hiezu bieten keine Schwierigkeiten.

Schließlich kann man für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen noch einseitige lokale Extremwerte und Extremstellen erklären und für diese ganz entsprechend einen Verteilungssatz unter Benützung einseitiger F_σ-Mengen usw. herleiten.

Graphentransformationen

Von

Herbert Izbicki, Wien

(Eingegangen am 29. Juni 1959)

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit sollen die Eigenschaften einiger wichtiger Graphentransformationen untersucht werden. Wir erklären zunächst die Schreibweise.

(1.1) *Notation.*

(i) $[a_1, \ldots, a_n]$ ungeordnetes n-Tupel.

(ii) $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ geordnetes n-Tupel.

(iii) $\{a\}$ Menge aller Elemente a.

(iv) $\{a \mid B\}$ Menge aller Elemente a, die den Bedingungen B genügen.

(v) ord M Ordnung (d. h. Anzahl der Elemente) der Menge M.

(vi) $fa = b$, $f(a) = b$ die Funktion f ordnet dem Element a das Element b zu.

(vii) $f: M \to N$ die Funktion f ordnet jedem Element aus der Menge M ein Element aus der Menge N zu.

(viii) $: A : \Rightarrow : B :$ wenn die Aussagen A gelten, dann gelten die Aussagen B. Sollen Symbole dieser Art ineinandergeschachtelt werden, dann werden die Anzahlen der Punkte vermehrt.

(ix) $\exists$ es gibt, $\nexists$ es gibt nicht

(x) $\ni$ so daß

(1.2) Beschränkt man sich in einer Arbeit auf Graphen ohne isolierte Punkte und ohne mehrfache Kanten, so kann man jeden Graphen X als Menge $E^*(X)$ von Punktepaaren charakterisieren, wie z. B. in [4], [5], [8]. Läßt man auch isolierte Punkte zu, so muß man die Menge $V(X)$ der Knotenpunkte extra angeben. Diese Schreibweise ermöglicht eine leichtere Handhabung, so daß sie oft auch dort verwendet wird,

wo man nicht durch das Vorhandensein isolierter Punkte dazu gezwungen ist, so z. B. in [6], [7], [12], [15]. Zur Beschreibung beliebiger Graphen ist folgende Definition geeignet: Ein (nicht orientierter oder orientierter) Graph ist ein geordnetes Tripel, $X = \langle V, E, f\rangle$. Dabei sind V und E zwei fremde Mengen; sie heißen Menge der Knotenpunkte und Menge der Kanten von X. f ist eine Funktion, die jeder Kante ein (ungeordnetes oder geordnetes) Paar von Knotenpunkten zuordnet. Beim formalen Rechnen, insbesondere mit Graphentransformationen, erwachsen aus dieser letzten Definition oft unüberbrückbare Hindernisse. Wir definieren daher wie folgt.

(1.3) *Definition.*

1. Ein nicht orientierter Graph X wird durch drei paarweise fremde Mengen $V(X)$, $E(X)$, $S(X)$ und drei Funktionen f_X, g_X, h_X beschrieben. $X = \langle V(X), E(X), S(X), f_X, g_X, h_X\rangle$.
2. $S(X) = \{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(X);\ i = 1, 2\}$.
3. $g_X : E(X) \to [S(X), S(X)]$, u. zw. $g_X e = [\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle]$.
4. $h_X : S(X) \to V(X)$.
5. $f_X : E(X) \to [V(X), V(X)]$, u. zw. $f_X e = [h_X\langle e, 1\rangle, h_X\langle e, 2\rangle]$.

(1.4) *Definition.*

1. Ein orientierter Graph X wird durch drei paarweise fremde Mengen $V(X)$, $E(X)$, $S(X)$ und drei Funktionen f_X, g_X, h_X beschrieben. $X = \langle V(X), E(X), S(X), f_X, g_X, h_X]$.
2. $S(X) = \{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(X);\ i = 1, 2\}$.
3. $g_X : E(X) \to \langle S(X), S(X)\rangle$, u. zw. $g_X e = \langle\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle\rangle$.
4. $h_X : S(X) \to V(X)$.
5. $f_X : E(X) \to \langle V(X), V(X)\rangle$, u. zw. $f_X e = \langle h_X\langle e, 1\rangle, h_X\langle e, 2\rangle\rangle$.

(1.5) In den Definitionen (1.3) und (1.4) haben $V(X)$, $E(X)$, f_X die hergebrachte Bedeutung. Offenbar sind $S(X)$ und g_X durch $E(X)$ vollständig bestimmt, ebenso f_X durch h_X. Also genügt es zur Beschreibung eines (nicht orientierten oder orientierten) Graphen X, wenn $V(X)$, $E(X)$, h_X vorgegeben werden:

1. $X = \langle V(X), E(X), h_X\rangle$
2. $h_X : \{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(X);\ i = 1, 2\} \to V(X)$.

Diese Formulierung soll die Grundlage unserer weiteren Arbeit sein. Außerdem beschränken wir uns auf nicht orientierte Graphen.

(1.6) *Definition.*

(i) $\alpha_0(X) = \operatorname{ord} V(X)$. $\alpha_0(X)$ heißt die Ordnung von X.

(ii) $\alpha_1(X) = \operatorname{ord} E(X)$.

(iii) $d_X(v) = \operatorname{ord}\{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(X);\ i = 1, 2;\ h_X\langle e, i\rangle = v\}$. $d_X(v)$ heißt der Grad des Knotenpunktes v im Graphen X.

(iv) $n(X) = n$ heißt $:v \varepsilon V(X): \Rightarrow : d_X(v) = n:$. Wir sagen, X ist regulär vom Grade n.

(v) Eine Schlinge ist eine Kante $e \varepsilon E(X)$ derart, daß $h_X\langle e, 1\rangle = h_X\langle e, 2\rangle$.

(vi) Ein Graph X heißt ein Graph im engeren Sinne, wenn er keine Schlingen hat, d. h. wenn $:e \varepsilon E(X): \Rightarrow : h_X\langle e, 1\rangle \neq h_X\langle e, 2\rangle:$. Sind auch Schlingen zugelassen, so sprechen wir von Graphen im weiteren Sinne.

(vii) Ein Graph im engeren Sinne heißt ein spezieller Graph, wenn $:e_1, e_2 \varepsilon E(X): \Rightarrow : [h_X\langle e_1, 1\rangle,\ h_X\langle e_1, 2\rangle] \neq [h_X\langle e_2, 1\rangle,\ h_X\langle e_2, 2\rangle]:$.

(viii) Ein Graph X heißt ein endlicher Graph, wenn $V(X)$ und $E(X)$ endliche Mengen sind. Anderenfalls heißt X unendlich.

(1.7) *Definition.*

(i) Werden durch eine Transformation γ die Knotenpunkte eines Graphen X untereinander und die Kanten von X untereinander so vertauscht, daß ein zu X isomorpher Graph γX entsteht, so heißt γ ein Automorphismus von X.

(ii) Die Gruppe aller Automorphismen von X heißt die Automorphismengruppe $G_{VE}(X)$ von X.

(iii) Die von $G_{VE}(X)$ auf $V(X)$ resp. $E(X)$ induzierten Gruppen heißen $G_V(X)$ resp. $G_E(X)$.

(1.8) *Satz. Ist X ein spezieller Graph, so ist $G_{VE}(X) \cong G_V(X)$.*

Beweis. Man kann $G_{VE}(X) = \langle G_V(X), G_E(X)\rangle$ und $\langle \gamma_V', \gamma_E'\rangle \cdot \langle \gamma_V'', \gamma_E''\rangle = \langle \gamma_V' \gamma_V'', \gamma_E' \gamma_E''\rangle$ setzen. Da X ein spezieller Graph ist, zwischen zwei Knotenpunkten also höchstens eine Kante verlaufen kann, definiert jedes γ_V eindeutig ein γ_E.

$$\gamma_E e = [\gamma_V h_X\langle e, 1\rangle, \gamma_V h_X\langle e, 2\rangle].$$

(1.9) *Satz. Ist X ein spezieller Graph ohne isolierte Punkte und ohne isolierte Kanten, so ist $G_{VE}(X) \cong G_V(X) \cong G_E(X)$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe in X zwei Knotenpunkte, die mit

genau derselben Menge von Kanten inzident wären. Dann wären folgende Fälle denkbar:

1. Diese Menge von Kanten ist leer: dann gäbe es isolierte Punkte.

2. Sie besteht aus genau einer Kante: dann gäbe es eine isolierte Kante.

3. Sie besteht aus mindestens zwei Kanten: dann wäre X kein spezieller Graph.

Also kann in X jeder Knotenpunkt eindeutig durch die Menge aller Kanten charakterisiert werden, die mit ihm inzident sind. Jedes γ_E definiert eindeutig ein γ_V. Rest wie bei (1.8).

(1.10) *Definition.* Wenn zwei Permutationsgruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ auseinander durch Umbenennung der Variablen hervorgehen, so wollen wir sie äquivalent nennen und $\mathfrak{G} \sim \mathfrak{H}$ schreiben.

(1.11) *Satz.*

(i) $\alpha_1(X) = \frac{1}{2} \sum_{v \varepsilon V(X)} d_X(v)$.

(ii) *Ist X regulär, so ist* $\alpha_1(X) = \frac{1}{2}\, \alpha_0(X)\, n(X)$.

Beweis.

(i) $\frac{1}{2} \sum_{v \varepsilon V(X)} d_X(v) = \frac{1}{2} \sum_{v \varepsilon V(X)} \operatorname{ord} \{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(X); i = 1, 2; h_X\langle e, i\rangle = v\} =$

$= \frac{1}{2} \sum_{v \varepsilon V(X)} 2.\, \operatorname{ord} \{\langle e, 1\rangle \mid e \varepsilon E(X); h_X\langle e, 1\rangle = v\} = \sum_{v \varepsilon V(X)} \operatorname{ord} \{e \mid e \varepsilon E(X);$

$h_X\langle e, 1\rangle = v\} = \operatorname{ord} \{e \mid e \varepsilon E(X); h_X\langle e, 1\rangle = v; v \varepsilon V(X)\} =$

$= \operatorname{ord} \{e \mid e \varepsilon E(X)\} = \operatorname{ord} E(X) = \alpha_1(X)$.

(ii) $\alpha_1 = \frac{1}{2} \sum_{v \varepsilon V(X)} d_X(v) = \frac{1}{2} \sum_{v \varepsilon V(X)} n(X) = \frac{1}{2} \operatorname{ord} V(X)\, n(X) = \frac{1}{2}\, \alpha_0(X)\, n(X)$.

(1.12) Wenn $: e_1, e_2 \varepsilon E(X) : \Rightarrow : [h_X\langle e_1, 1\rangle, h_X\langle e_1, 2\rangle] \neq [h_X\langle e_2, 1\rangle, h_X\langle e_2, 2\rangle]$, dann ist jede Kante e durch $[h_X\langle e_1, 1\rangle, h_X\langle e, 2\rangle]$ eindeutig charakterisiert, kann also damit indentifiziert werden. Die auf diese Weise charakterisierte Menge der Kanten wollen wir mit $E^*(X)$ bezeichnen. Will man sodann von der Schreibweise $X = \langle V(X), E^*(X)\rangle$ zur allgemeineren zurückkehren, so braucht man bloß $E(X) = E^*(X)$, $[h_X\langle [v', v''], 1\rangle, h_X\langle [v', v''], 2\rangle] = [v', v'']$ zu setzen.

2. Das Komplement

In diesem Abschnitt kommen nur spezielle Graphen vor. Das Komplement $\varkappa X$ eines speziellen Graphen X ist jener spezielle Graph, den wir aus X erhalten, wenn wir die Menge der Knotenpunkte ungeändert

beibehalten und je zwei Knotenpunkte genau dann miteinander durch eine Kante verbinden, wenn sie in X nicht verbunden sind.

(2.1) *Definition.* Sei X ein spezieller Graph, dann sei $V(\varkappa X)=V(X)$ $E^*(\varkappa X) = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); x \neq y; [x, y] \notin E^*(X)\}$.

(2.2) *Satz.* $\varkappa^2 X = X$.

Beweis.

1. $V(\varkappa^2 X) = V(\varkappa X) = V(X)$.
2. $E^*(\varkappa^2 X) = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(\varkappa X); x \neq y; [x, y] \notin E^*(\varkappa X)\} =$
   $= \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); x \neq y; [x, y] \notin \{[x', y'] \mid x', y' \varepsilon V(X); x' \neq y';$
   $[x', y'] \notin E^*(X)\} =$
   $= \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); x \neq y;$ nicht $(x, y \varepsilon V(X); x \neq y; [x, y] \notin E^*(X))\} =$
   $= \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); x \neq y;$ nicht $([x, y] \notin E^*(X))\} =$
   $= \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); x \neq y; [x, y] \varepsilon E^*(X)\} = \{[x, y] \mid [x, y] \varepsilon E^*(X)\} =$
   $= E^*(X)$.
3. $V(\varkappa^2 X) = V(X)$, $E^*(\varkappa^2 X) = E^*(X)$, also $\varkappa^2 X = X$.

(2.3) *Satz.*

(i) $E^*(X) \cap E^*(\varkappa X) = \varnothing$.

(ii) $d_X(v) + d_{\varkappa X}(v) = \alpha_0(X) - 1$

(iii) *Ist X regulär, so ist auch $\varkappa X$ regulär und* $n(X) + n(\varkappa X) = \alpha_0(X) - 1$.

Beweis.

(i) $E^*(\varkappa X) = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); x \neq y; [x, y] \notin E^*(X),$
$: [x, y] \varepsilon E^*(\varkappa X) : \Rightarrow : [x, y] \notin E^*(X) :,$
$E^*(X) \cap E^*(\varkappa X) = \varnothing$.

(ii) $E^*(X) \cap E^*(\varkappa X) = \varnothing,$
$\{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(X); i = 1, 2; h_X\langle e, i\rangle = v\} \cap \{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(\varkappa X); i = 1, 2;$
$h_{\varkappa X}\langle e, i\rangle = v\} = \varnothing,$

$d_X(v) + d_{\varkappa X}(v) = \operatorname{ord}\{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(X); i = 1, 2; h_X\langle e, i\rangle = v\} +$
$+ \operatorname{ord}\{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(\varkappa X); i = 1, 2; h_{\varkappa X}\langle e, i\rangle = v\} =$
$= \operatorname{ord}(\{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(X); i = 1, 2; h_X\langle e, i\rangle = v\} \cup$
$\{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(\varkappa X); i = 1, 2; h_{\varkappa X}\langle e, i\rangle = v\}) =$
$= \operatorname{ord}\{\langle e, i\rangle \mid i = 1, 2;$ entweder $e \varepsilon E(X), h_X\langle e, i\rangle = v,$
oder $e \varepsilon E(\varkappa X), h_{\varkappa X}\langle e, i\rangle = v\} =$
$= \operatorname{ord}\{\langle [x, y], i\rangle \mid i = 1, 2;$ entweder $[x, y] \varepsilon E^*(X), h_X\langle [x, y], i\rangle = v,$
oder $[x, y] \varepsilon E^*(\varkappa X), h_{\varkappa X}\langle [x, y], i\rangle = v\}.$

O.B.d.A. $h_X\langle [x, y], 1\rangle = x = v,$ $h_X\langle [x, y], 2\rangle = y,$
$h_{\varkappa X}\langle [x, y], 1\rangle = x = v,$ $h_{\varkappa X}\langle [x, y], 2\rangle = y.$

$$d_X(v) + d_{\varkappa X}(v) = \operatorname{ord}\{\langle [v, y], 1\rangle \mid \text{entweder } [v, y] \varepsilon E^*(X)$$
$$\text{oder } [v, y] \varepsilon E^*(\varkappa X) =$$
$$= \operatorname{ord}\{[v, y] \mid v \neq y;\ v, y \varepsilon V(X);\ \text{entweder } [v, y] \varepsilon E^*(X),$$
$$\text{oder } [v, y] \varepsilon \{[x', y'] \mid x' \neq y';\ x', y' \varepsilon V(X);\ [x', y'] \dot{\notin} E^*(X)\}\} =$$
$$= \operatorname{ord}\{[v, y] \mid v \neq y;\ v, y \varepsilon V(X);\ \text{entweder } [v, y] \varepsilon E^*(X),$$
$$\text{oder } [v, y] \dot{\notin} E^*(X)\} =$$
$$= \operatorname{ord}\{[v, y] \mid v \neq y;\ v, y \varepsilon V(X)\} = \operatorname{ord}\{y \mid v \neq y;\ v, y \varepsilon V(X)\} =$$
$$= \operatorname{ord}(\{y \mid y \varepsilon V(X)\} - v) = \operatorname{ord} V(X) - 1 = \alpha_0(X) - 1.$$

(iii) $d_X(v) + d_{\varkappa X}(v) = \alpha_0(X) - 1$,
X regulär, $: v \varepsilon V(X) : \Rightarrow : d_X(v) = n(X) :$,
$n(X) + d_{\varkappa X}(v) = \alpha_0(X) - 1$,
$d_{\varkappa X}(v) = \alpha_0(X) - 1 - n(X)$ für alle $v \varepsilon V(X) = V(\varkappa X)$,
$n(\varkappa X) = \alpha_0(X) - 1 - n(X)$,
$n(X) + n(\varkappa X) = \alpha_0(X) - 1$.

(2.4) *Satz.* $\alpha_1(X) + \alpha_1(\varkappa X) = \binom{\alpha_0(X)}{2}$.

Beweis. Laut (2.3.i) ist $E^*(X) \cap E^*(\varkappa X) = \varnothing$.

$$\alpha_1(X) + \alpha_1(\varkappa X) = \operatorname{ord} E^*(X) + \operatorname{ord} E^*(\varkappa X) = \operatorname{ord}(E^*(X) \cup E^*(\varkappa X)) =$$
$$= \operatorname{ord}(\{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X);\ x \neq y;\ [x, y] \varepsilon E^*(X)\} \cup$$
$$\cup \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(\varkappa X) = V(X);\ x \neq y;\ [x, y] \dot{\notin} E^*(X)\}) =$$
$$= \operatorname{ord}\{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X);\ x \neq y;\ [x, y] \varepsilon E^*(X) \text{ oder } \dot{\notin} E^*(X)\} =$$
$$= \operatorname{ord}\{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X);\ x \neq y\} = \binom{\operatorname{ord} V(X)}{2} = \binom{\alpha_0(X)}{2}.$$

(2.5) *Satz.* $G_\gamma(\varkappa X) = G_\gamma(X)$.

Beweis. 1. Sei $\gamma \varepsilon G_\gamma(X)$, d. h. $: [x', y'] \varepsilon E^*(X) : \Rightarrow : [\gamma x', \gamma y'] \varepsilon E^*(X) :$ und $: x'', y'' \varepsilon V(X);\ [x'', y''] \dot{\notin} E^*(X) : \Rightarrow : [\gamma x'', \gamma y''] \dot{\notin} E^*(X) :$.

1a) Sei $[x, y] \varepsilon E^*(X)$, dann $[\gamma x, \gamma y] \varepsilon E^*(X)$, $x, y, \gamma x, \gamma y \varepsilon V(X)$, $[x, y] \dot{\notin} E^*(\varkappa X)$, $[\gamma x, \gamma y] \dot{\notin} E^*(\varkappa X)$.

1b) Sei $[x, y] \dot{\notin} E^*(X)$; $x, y \varepsilon V(X)$; $x \neq y$. Dann $[\gamma x, \gamma y] \dot{\notin} E^*(X)$; $\gamma x, \gamma y \varepsilon V(X)$; $\gamma x \neq \gamma y$; $[x, y] \varepsilon E^*(\varkappa X)$; $[\gamma x, \gamma y] \varepsilon E^*(\varkappa X)$.

1c) Wenn wir 1a) und 1b) zusammenfassen, dann sehen wir, daß $[\gamma x, \gamma y]$ dann und nur dann $\varepsilon E^*(\varkappa X)$ ist, wenn $[x, y] \varepsilon E^*(\varkappa X)$, also $\gamma \varepsilon G_\gamma(\varkappa X)$, $G_\gamma(X) \subseteqq G_\gamma(\varkappa X)$.

2. In 1. zeigten wir, daß $G_\gamma(X) \subseteqq G_\gamma(\varkappa X)$, also gilt auch $G_\gamma(\varkappa X) \subseteqq \subseteqq G_\gamma(\varkappa^2 X)$. $\varkappa^2 X = X$, also $G_\gamma(\varkappa X) \subseteqq G_\gamma(X)$ und $G_\gamma(\varkappa X) = G_\gamma(X)$.

(2.6) *Definition.* Sind x und y zwei Knotenpunkte einunddesselben zusammenhängenden Teiles eines Graphen X, so verstehen wir unter dem Abstand $\varrho_X(x, y)$ die Kantenzahl eines kürzesten Weges von x nach y.

(2.7) *Satz. Wenn X nicht zusammenhängend ist, dann ist $\varkappa X$ zusammenhängend und der Abstand zweier beliebiger Knotenpunkte von $\varkappa X$ beträgt höchstens 2. In Formeln* $: c(X)=0,\ x \varepsilon V(X),\ y \varepsilon V(X) : \Rightarrow : c(\varkappa X) \geqq 1,\ \varrho_{\varkappa X}(x, y) \leqq 2 :$.

Beweis. Da X nicht zusammenhängend ist, kann man $V(X)$ derart in zwei nicht leere Klassen K_1 und K_2 einteilen, daß in X kein Knotenpunkt aus K_1 mit einem Knotenpunkt aus K_2 verbunden ist. Also ist in $\varkappa X$ jeder Knotenpunkt aus K_1 mit jedem Knotenpunkt aus K_2 verbunden. Sind nun a und b zwei Knotenpunkte aus K_1 (oder analogerweise aus K_2), so müssen wir noch zeigen, daß es in $\varkappa X$ einen Weg von höchstens zwei Kanten von a nach b gibt. Da K_2 nicht leer ist, gibt es einen Knotenpunkt $c \varepsilon K_2$. und es ist $[a, c] \varepsilon E^*(\varkappa X)$ und $[c, b] \varepsilon E^*(\varkappa X)$, q. e. d.

(2.8) *Folgerung.* Wenn es in einem zusammenhängenden Graphen X ein Punktepaar mit einem Abstand $\geqq 3$ gibt, so ist auch $\varkappa X$ zusammenhängend.

(2.9) *Anmerkung.* Es gibt auch Paare zusammenhängender komplementärer Graphen mit $\varrho_X(a, b) \leqq 2$ und $\varrho_{\varkappa X}(a, b) \leqq 2$ für jedes beliebige Paar von Knotenpunkten a und b, z. B.

$V(X_1) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E^*(X_1) = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5], [5, 1]\}$ oder
$V(X_2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E^*(X_2) = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5], [5, 6], [6, 7], [7, 1], [2, 5], [3, 6], [4, 7]\}$ oder
$V(X_3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E^*(X_3) = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 5], [3, 6], [4, 7], [5, 6], [6, 7], [7, 5]\}$.

(2.10) *Definition.* Sind X und Y zwei fremde Graphen, d. h. $V(X) \cap V(Y) = \varnothing$, $E(X) \cap E(Y) = \varnothing$, dann ist die Summe $X + Y$ wie folgt definiert:

$$V(X + Y) = V(X) \cup V(Y),\ E(X + Y) = E(X) \cup E(Y).$$
$$: e \varepsilon E(X) : \Rightarrow : h_{X+Y}\langle e, i\rangle = h_X\langle e, i\rangle :,$$
$$: e \varepsilon E(Y) : \Rightarrow : h_{X+Y}\langle e, i\rangle = h_Y\langle e, i\rangle :.$$

(2.11) *Satz. Sei $\{\mathfrak{G}_i\}$ eine endliche Menge paarweise variablen-fremder endlicher Permutationsgruppen, die folgenden Bedingungen genügen:*

(1) *Zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}_i$ gibt es mindestens einen Graphen X_i mit $G_V(X_i) = G_i$.*

(2) *Entweder* (a) *es gibt mindestens zwei zueinander nicht äquivalente* (*vgl.* (1.10)) $\mathfrak{G}_i$,

oder (b) *es gibt mindestens ein $\mathfrak{G}_i$, zu dem sich zwei verschiedene Graphen X_i^1 und X_i^2 mit $G_V(X_i^1) = \mathfrak{G}_i$, $G_V(X_i^2) = \mathfrak{G}_i$ finden lassen, oder beides.*

Dann läßt sich ein zusammenhängender Graph X mit $G_V(X) = \prod_i G_i$ konstruieren.

Beweis. Nach Satz (2.7) und Satz (2.5) gibt es zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}_i$ mindestens einen zusammenhängenden Graphen Z_i mit $G_V(Z_i) = \mathfrak{G}_i$. Besteht die Menge $\{\mathfrak{G}_i\}$ aus einer einzigen Gruppe, dann ist überhaupt nichts mehr zu beweisen. Wir nehmen also an, daß $\{\mathfrak{G}_i\}$ mindestens zwei Gruppen enthält. Zwei Fälle sind möglich:

(a) es gibt mindestens zwei zueinander nicht äquivalente $\mathfrak{G}_i$,

(b) alle $\mathfrak{G}_i$ sind zueinander äquivalent.

Im Falle (a) können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\mathfrak{G}_1 \not\sim \mathfrak{G}_2$. Dann haben wir $G_V(Z_1) = \mathfrak{G}_1$, $G_V(Z_2) = \mathfrak{G}_2$, $Z_1 \not\cong Z_2$, $G_V(Z_1 + Z_2) = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$, $G_V(\varkappa(Z_1 + Z_2)) = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$. Wir setzen $\varkappa(Z_1 + Z_2) = Y_2$. Dann ist $c(Z_1 + Z_2) = c(\varkappa Y_2) = 0$, $c(\varkappa(Z_1 + Z_2)) = c(Y_2) \geqq 1$, laut (2.2) und (2.7), $G_V(Y_2) = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$.

Im Falle (b) hat $\prod_i \mathfrak{G}_i$ lauter äquivalente Faktoren, und zwar mindestens zwei: $\mathfrak{G}_1 \sim \mathfrak{G}_2$. Dazu muß es den Voraussetzungen entsprechend zwei verschiedene Graphen Z_1 und X_2 mit $G_V(Z_1) = \mathfrak{G}_1$, $G_V(X_2) = \mathfrak{G}_2$ geben, wovon mindestens der eine, o.B.d.A. Z_1, zusammenhängend angenommen werden darf. (Wäre dies nicht der Fall, dann erwüchsen im folgenden daraus Schwierigkeiten, daß für zwei verschiedene nicht zusammenhängende Graphen A und B sehr wohl $G_V(A + B) \neq G_V(A) \times G_V(B)$ sein kann; dann nämlich, wenn ein zusammenhängender Teil von A gleich einem zusammenhängenden Teil von B ist). Wir erhalten $G_V(Z_1) = \mathfrak{G}_1$, $G_V(X_2) = \mathfrak{G}_2$. $G_V(Z_1 + X_2) = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$, $G(\varkappa(Z_1 + X_2)) = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$. Wenn wir $\varkappa(Z_1 + X_2) = Y_2$ setzen, dann $c(Z_1 + X_2) = c(\varkappa Y_2) = 0$, $c(\varkappa(Z_1 + X_2)) = c(Y_2) \geqq 1$, $G_V(Y_2) = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$.

Es gibt somit in beiden Fällen einen zusammenhängenden Graphen Y_2 mit nicht zusammenhängendem Komplement $\varkappa Y_2$, so daß $G_V(Y_2) = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$.

Induktions-Voraussetzungen. Es gibt einen Graphen Y_n mit $c(Y_n) \geqq 1$, $c(\varkappa Y_n) = 0$, $G_V(Y_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{G}_i$.

Induktions-Behauptung. Es gibt einen Graphen Y_{n+1} mit $c(Y_{n+1}) \geqq 1$, $c(\varkappa Y_{n+1}) = 0$, $G_V(Y_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} \mathfrak{G}_i$.

Induktions-Beweis. Wir wissen bereits, daß es einen zusammenhängenden Graphen Z_{n+1} mit $G_V(Z_{n+1}) = \mathfrak{G}_{n+1}$ gibt. Es sind zwei Fälle denkbar: (i) $Z_{n+1} \not\cong Y_n$, (ii) $Z_{n+1} \cong Y_n$.

Fall (i) $Y_n \ncong Z_{n+1}$, $G_V(Y_n + Z_{n+1}) = G_V(Y_n) \times G_V(Z_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} \mathfrak{G}_i \times \mathfrak{G}_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} \mathfrak{G}_i$; $G_V(\varkappa(Y_n + Z_{n+1})) = \prod_{i=1}^{n+1} \mathfrak{G}_i$. Wir setzen $\varkappa(Y_n + Z_{n+1}) \; Y_{n+1}$. Dann ist $c(Y_n + Z_{n+1}) = c(\varkappa Y_{n+1}) = 0$, $c(\varkappa(Y_n + Z_{n+1})) = c(Y_{n+1}) \geqq 1$, $G_V(Y_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} \mathfrak{G}_i$.

Fall (ii) $Z_{n+1} \cong Y_n$. Angenommen, es wäre auch $\varkappa Z_{n+1} \cong Y_n$, also $Z_{n+1} \cong \varkappa Y_n$. Dies ist aber unmöglich, weil Z_{n+1} zusammenhängend ist, $\varkappa Y_n$ aber nicht. Also $Y_n \ncong \varkappa Z_{n+1}$, $G_V(Y_n + \varkappa Z_{n+1}) = G_V(Y_n) \times G_V(\varkappa Z_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} \mathfrak{G}_i \times \mathfrak{G}_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} \mathfrak{G}_i$, $G_V(\varkappa(Y_n + \varkappa Z_{n+1})) = \prod_{i=1}^{n+1} \mathfrak{G}_i$. Wir setzen $Y_{n+1} = \varkappa(Y_n + \varkappa Z_{n+1})$ und haben $c(Y_n + \varkappa Z_{n+1}) = c(\varkappa Y_{n+1}) = 0$, $c(\varkappa(Y_n + \varkappa Z_{n+1})) = c(Y_{n+1}) \geqq 1$, $G_V(Y_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} \mathfrak{G}_i$.

(2.12) *Anmerkung.* In der Praxis läßt sich, bei Vorhandensein verschiedener Z_i, die in (2.11) angegebene Konstruktion durch gleichzeitiges Hinzufügen mehrerer paarweise verschiedener Z_i oft wesentlich verkürzen.

(2.13) *Definition.* Der vollständige Graph C_m ist definiert durch

$$V(C_m) = \{a_i \mid i = 1, \ldots, m\}, \; E^*(C_m) = \{[a, b] \mid a, b \varepsilon V(C_m); a \neq b\}.$$

(2.14) *Definition.* Der Graph $F(k, l)$ ist definiert durch

$$V(F(k, l)) = \{a_i \mid i = 1, \ldots, k\} \cup \{b_j \mid j = 1, \ldots, l\},$$
$$E^*(F(k, l)) = \{[a_i, b_j] \mid i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, l\}.$$

(2.15) *Definition.* Sind X und Y zwei Graphen, so bedeutet $X \prec Y$ resp. $X \preceq Y$, daß 1. $V(X) = V(Y)$,

2. $E(X) \subset E(Y)$ resp. $E(X) \subseteqq E(Y)$,

3. $: e \varepsilon E(X) : \Rightarrow : h_X\langle e, i\rangle = h_Y\langle e, i\rangle :$.

(2.16) *Satz.* (a) $F(k, l) \cong F(l, k)$,

b) $\varkappa F(k, l) = C_k + C_l$. (2.16)

Beweis. (a) ist bloß eine Frage der Umbenennung der Knotenpunkte.

(b) $V(\varkappa F(k, l)) = V(F(k, l)) = \{a_i \mid i = 1, \ldots, k\} \cup \{b_j \mid j = 1, \ldots, l\} = V(C_k + C_l)$. $E^*(\varkappa F(k, l)) = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(F(k, l)); x \neq y; [x, y] \notin E^*(F(k, l))\} = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon \{a_i \mid i = 1, \ldots, k\} \cup \{b_j \mid j = 1, \ldots, l\}; x \neq y; [x, y] \notin \{[a_i, b_j] \mid 1 = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, l\}\} = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon \{a_i \mid i = 1, \ldots, k\} \cup \{b_j \mid j = 1, \ldots, l\}; x \neq y;$ entweder $[x, y] \varepsilon \{[a_i, a_\mu] \mid i, \mu = 1, \ldots, k\}$ oder $[x, y] \varepsilon \{[b_j, b_\nu] \mid j, \nu =$

$= 1, \ldots, l\}\} = \{[a_i, a_\mu] \mid i, \mu = 1, \ldots, k; i \neq \mu\} \cup \{[b_i, b_\nu] \mid j, \nu = 1, \ldots, l; j \neq \nu\} = E^*(C_k) \cup E^*(C_l) = E^*(C_k + C_l)$.

(2.17) *Satz. Die Farbenzahl $\chi(X)$ eines Graphen X ist dann und nur dann $\leqq 2$, wenn es einen Graphen $F(k, l)$ so gibt, daß $X \preceq F(k, l)$.*

Beweis. Ist $\chi(X) = 2$, so kann man alle Punkte mit der einen Farbe mit a_i $(i = 1, \ldots, k)$ bezeichnen, alle Punkte mit der anderen Farbe mit b_j $(j = 1, \ldots, l)$. Offenbar $V(X) = \{a_i \mid i = 1, \ldots, k\} \cup \{b_j \mid j = 1, \ldots, l\} = V(F(k, l))$ und $E(X) \subseteqq \{[a_i, b_j] \mid i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, l\} = E^*(F(k, l))$ also $X \preceq F(k, l)$. Ist $\chi(X) = 1$, also $E^*(X) = \varnothing$, so ist die Existenz eines passenden $F(k, l)$ trivial. Ebenso, daß aus $X \preceq F(k, l)$ stets $\chi(X) \leqq 2$ folgt.

(2.18) *Satz. Wenn X zusammenhängend und $\chi(X) = 2$ ist, dann gibt es einen (bis auf die Vertauschung von k und l) eindeutig bestimmten Graphen $F(k, l)$, so daß $X \preceq F(k, l)$.*

Beweis. Daß es mindestens einen solchen Graphen gibt, folgt schon aus Satz (2.17). Angenommen es gäbe zwei. Dann gibt es zwei Knotenpunkte $a, b \in V(X)$ und zwei Farbenzuordnungen φ und ψ mit je genau zwei Farben, derart, daß $\varphi(a) = \varphi(b)$ und $\psi(a) \neq \psi(b)$. Da X zusammenhängend ist, folgt aus $\varphi(a) = \varphi(b)$, daß es einen Weg mit gerader Kantenzahl von a nach b gibt; und aus $\psi(a) \neq \psi(b)$, daß es auch einen mit ungerader Kantenzahl gibt. Dann gibt es aber in X auch einen Kreis mit ungerader Kantenzahl, und das ist bei einem Graphen mit der Farbenzahl 2 nicht möglich.

(2.19) *Satz. Wenn es zu einem Graphen X einen Graphen $F(k, l)$ so gibt, daß $X \prec F(k, l)$, dann ist $C_k + C_l \prec \varkappa X$ und $\varkappa X$ ist zusammenhängend.*

Beweis. Nach Satz (2.16.b) ist $\varkappa F(k, l) = C_k + C_l$. $X \prec F(k, l)$ heißt, daß X genau dieselben Knotenpunkte wie $F(k, l)$ hat, daß aber mindestens eine der Kanten fehlt. Also hat $\varkappa X$ dieselben Knotenpunkte wie $\varkappa F(k, l)$, aber mindestens eine Kante dazu: $\varkappa X \succ \varkappa F(k, l) = C_k + C_l$. Wenn aber zu $C_k + C_l$, der Summe zweier vollständiger Graphen, mindestens eine Kante hinzugefügt und an der Knotenpunktmenge nichts geändert wird, dann werden C_k und C_l verbunden. Also ist $\varkappa X$ zusammenhängend.

3. Die Transformation ϑ

Anton Kotzig [10] hat die folgende Transformation betrachtet:

Einem vorgegebenen Graphen X wird ein neuer Graph ϑX zugesondert. Den Kanten von X entsprechen in eineindeutiger Weise

die Knotenpunkte von ϑX. Zwei Knotenpunkte von ϑX sind dann und nur dann durch eine Kante miteinander verbunden, wenn die ihnen entsprechenden Kanten von X benachbart sind.

Dabei betrachtet *A. Kotzig* nur spezielle Graphen. Die folgende Definition ist so abgefaßt, daß sie sich auf beliebige Graphen anwenden läßt.

(3.1) *Definition.* $V(\vartheta X) = E(X)$,

$E(\vartheta X) = \{[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); i', i'' = 1,2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e'', i''\rangle;$
$h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle\}$,

$[h_{\vartheta X}\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], 1\rangle, h_{\vartheta X}\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], 2\rangle] = [e', e'']$.

(3.2) *Satz. Wenn* $e \varepsilon E(X) = V(\vartheta X)$, $h_X\langle e, 1\rangle = x$, $h_X\langle e, 2\rangle = y$, *dann* $x, y \varepsilon V(X)$ *und* $d_{\vartheta X}(e) = d_X(x) + d_X(y) - 2$.

Beweis. $h_X\langle e, 1\rangle = x$, $h_X\langle e, 2\rangle = y$,

$h_X : \{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(X); i = 1, 2\} \to V(X)$, demnach $e \varepsilon E(X)$ und $x, y \varepsilon V(X)$.

$d_X(v) = \operatorname{ord}\{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(X); i = 1, 2; h_X\langle e, i\rangle = v\}$,

$d_{\vartheta X}(e) = \operatorname{ord}\{\langle \bar{e}, i\rangle \mid \bar{e} \varepsilon E(\vartheta X); i = 1, 2; h_{\vartheta X}\langle \bar{e}, i\rangle = e\} =$
$= \operatorname{ord}\{\langle \bar{e}, i\rangle \mid \bar{e} \varepsilon \{[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); i', i'' = 1, 2;$
$\langle e', i'\rangle \neq \langle e'', i''\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle\}; i=1, 2; h_{\vartheta X}\langle \bar{e}, i\rangle = e\} =$
$= \operatorname{ord}\{\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], i\rangle \mid e', e'' \varepsilon E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq$
$\neq \langle e'', i''\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle; i=1,2; h_{\vartheta X}\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], i\rangle = e\}$.

Für das weitere unterscheiden wir die beiden Fälle $x \neq y$ und $x = y$.

(i) $x \neq y$. Angenommen es gäbe in der obigen Menge ein

$[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle]$, derart, daß

$h_{\vartheta X}\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], 1\rangle = h_{\vartheta X}\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], 2\rangle = e$. Dann wäre $e' = e'' = e$. Aus $\langle e', i'\rangle \neq \langle e'', i''\rangle$ wird $\langle e, i'\rangle \neq \langle e, i''\rangle$, also $[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] = [\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle]$. Aus $h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle$ wird $h_X\langle e, 1\rangle = h_X\langle e, 2\rangle$, also $x = y$, ein Widerspruch. Demnach kann in der obigen Menge jedes $[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle]$ nur mit $i = 1$ *oder* mit $i = 2$, aber nicht mit beidem vorkommen. Also $d_{\vartheta X}(e) = \operatorname{ord}(\{[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e'', i''\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle; e' = e\} \cup \{[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \neq \langle e'', i''\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle; e'' = e\}) = \operatorname{ord}(\{[\langle e, i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e'' \varepsilon E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e, i'\rangle \neq \langle e'', i''\rangle; h_X\langle e, i'\rangle = = h_X\langle e'', i''\rangle\} \cup \{[\langle e', i'\rangle, \langle e, i''\rangle] \mid e' \varepsilon E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \neq \langle e, i''\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e, i''\rangle\})$. Diese beiden Mengen unterscheiden sich nur durch die Bezeichnungsweise (Vertauschung der einfach und der doppelt gestrichenen Größen). Daher

$d_{\vartheta X}(e) = \operatorname{ord}\{[\langle e', i'\rangle, \langle e, i''\rangle] \mid e' \varepsilon E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e, i''\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e, i''\rangle\} = \operatorname{ord}\big(\{[\langle e' i'\rangle, \langle e, 1\rangle] \mid e' \varepsilon E(X); i' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e, 1\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e, 1\rangle\} \cup \{[\langle e', i'\rangle, \langle e, 2\rangle] \mid e' \varepsilon E(X); i' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e, 2\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e, 2\rangle\}\big)$. Es ist $h_X\rangle e, 1\rangle = x$, $h_X\langle e, 2\rangle = y$, $x \neq y$, also sind diese beiden Mengen fremd und $d_{\vartheta X}(e) = \operatorname{ord}\{\langle e', i'\rangle \mid e' \varepsilon E(X); i' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e, 1\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = x\} + \operatorname{ord}\{\langle e', i'\rangle \mid e' \varepsilon E(X); i' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e, 2\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = y\}$. Nun ist $\langle e, 1\rangle \varepsilon \{\langle e', i'\rangle \mid e' \varepsilon E(X); i' = 1, 2; h_X\langle e', i'\rangle = x\}$, also $\operatorname{ord}\{\langle e', i'\rangle \mid e' \varepsilon E(X); i' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e, 1\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = x\} = \operatorname{ord}\{\langle e', i'\rangle \mid e' \varepsilon E(X); i' = 1, 2; h_X\langle e', i'\rangle = x\} - 1 = d_X(x) - 1$. Analog $\operatorname{ord}\{\langle e', i'\rangle \mid e' \varepsilon E(X); i' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e, 2\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = y\} = d_X(y) - 1$. Also $d_{\vartheta X}(e) = d_X(x) + d_X(y) - 2$.

(ii) $d_{\vartheta X}(e) = \operatorname{ord}\{\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], i\rangle \mid e', e'' \varepsilon E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e'', i''\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle; i = 1, 2; h_{\vartheta X}\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], i\rangle = e\} = \operatorname{ord}\{\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], i\rangle \mid e', e'' \varepsilon E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e'', i''\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle; i = 1, 2; h_{\vartheta X}\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], i\rangle = e$; entweder $e' = e''$, oder $e' \neq e''\} =$
$= \operatorname{ord}\{\langle[\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle], 1\rangle, \langle[\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle], 2\rangle\} +$
$+ \operatorname{ord}\{\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], i\rangle \mid e', e'' \varepsilon E(X); e' \neq e''; i', i'' = 1, 2; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle; i = 1, 2; h_{\vartheta X}\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], i\rangle = e\}$.

In der zweiten Menge kann wegen $e' \neq e''$ ein $[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle]$ nur mit $i = 1$ *oder* mit $i = 2$ vorkommen, aber nicht beidemale. Demnach $d_{\vartheta X}(e) = 2 + \operatorname{ord}\{[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); e' \neq e''; i', i'' = 1, 2; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle$; entweder $e' = e$, oder $e'' = e\} =$
$= 2 + \operatorname{ord}\big(\{[\langle e, i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e'' \varepsilon E(X); e'' \neq e; i', i'' = 1, 2; h_X\langle e'', i''\rangle = x\} \cup \{[\langle e', i'\rangle, \langle e, i''\rangle] \mid e' \varepsilon E(X); e' \neq e; i', i'' = 1, 2; h_X\langle e', i'\rangle = x\}\big)$. Diese beiden Mengen sind, von der Bezeichnungsweise abgesehen, gleich. $d_{\vartheta X}(e) = 2 + \operatorname{ord}\{[\langle e', i'\rangle, \langle e, i''\rangle] \mid e' \varepsilon E(X); e' \neq e; i', i'' = 1, 2; h_X\langle e', i'\rangle = x\}$. Die Bedingung $i'' = 1, 2$ ist von den anderen Bedingungen unabhängig, also $d_{\vartheta X}(e) = 2 + 2 \cdot \operatorname{ord}\{\langle e', i'\rangle \mid e' \varepsilon E(X); e' \neq e; i' = 1, 2; h_X\langle e', i'\rangle = x\}$. Die Bedingung $e' \neq e$ schließt genau $\langle e, 1\rangle$ und $\langle e, 2\rangle$ aus, also $d_{\vartheta X}(e) = 2 + 2\,(\operatorname{ord}\{\langle e', i'\rangle \mid e' \varepsilon E(X); i' = 1, 2; h_X\langle e', i'\rangle = x\} - 2) = 2 + 2\,(d_X(x) - 2) = 2\,d_X(x) - 2 = d_X(x) + d_X(y) - 2$.

(3.3) *Satz. Ist X regulär, so ist auch ϑX regulär und $n(\vartheta X) = 2\,n(X) - 2$.*

Beweis. Seien $e_1, e_2 \varepsilon V(\vartheta X)$, $h_X\langle e_1, 1\rangle = x_1$, $h_X\langle e_1, 2\rangle = y_1$, $h_X\langle e_2, 1\rangle = x_2$, $h_X\langle e_2, 2\rangle = y_2$. Es folgt aus der Regularität von X, daß $d_X(x_1) = d_X(y_1) = d_X(x_2) = d_X(y_2) = n(X)$ ist. Laut Satz (3.2) ist $d_{\vartheta X}(e_1) = d_X(x_1) + d_X(y_1) - 2 = 2n(X) - 2$ und $d_{\vartheta X}(e_2) = d_X(x_2) + d_X(y_2) - 2 =$

$= 2\,n(X) - 2$. Also $d_{\vartheta X}(e_1) = d_{\vartheta X}(e_2) = 2\,n(X) - 2$ für zwei beliebige Elemente $e_1, e_2 \varepsilon\, V(\vartheta X)$; d. h. $n(\vartheta X) = 2\,n(X) - 2$.

(3.4) *Satz.* (a) $\alpha_0(\vartheta X) = \alpha_1(X)$.

(b) $\alpha_1(\vartheta X) = \sum_{x \varepsilon V(X)} \binom{d_X(x)}{2}$.

Beweis. (a) $\alpha_0(\vartheta X) = \operatorname{ord} V(\vartheta X) = \operatorname{ord} E(X) = \alpha_1(X)$.

(b) $\alpha_1(\vartheta X) = \operatorname{ord} E(\vartheta X) =$

$= \operatorname{ord}\{[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e'', i''\rangle;$

$h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle\} =$

$= \sum_{x \varepsilon V(X)} \operatorname{ord}\{[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq$

$\neq \langle e'', i''\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle = x\} =$

$= \sum_{x \varepsilon V(X)} \operatorname{ord}\{[a, b] \mid a, b \varepsilon \{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(X); i = 1, 2; h_X\langle e, i\rangle = x\}; a \neq b\}.$

$\operatorname{ord}\{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(X); i = 1, 2; h_X\langle e, i\rangle = x\} = d_X(x),$

$\operatorname{ord}\{[a, b] \mid a, b \varepsilon \{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(X); i = 1, 2; h_X\langle e, i\rangle = x\}; a \neq b\} =$

$\binom{d_X(x)}{2}$. $\alpha_1(\vartheta X) = \sum_{x \varepsilon V(X)} \binom{d_X(x)}{2}$.

(3.5) *Satz. Ist X regulär, dann* $\alpha_1(\vartheta X) = \alpha_0(X)\binom{n(X)}{2}$.

Beweis. Folgt direkt aus (3.4.b).

(3.6) *Anmerkung.* Man kann obiges Resultat auch wie folgt ableiten: Nach (1.11.ii) ist $\alpha_1(X) = \frac{1}{2}\,\alpha_0(X)\,n(X)$, nach (3.3) $n(\vartheta X) = 2\,n(X) - 2$, nach (3.4.a) $\alpha_0(\vartheta X) = \alpha_1(X)$. Also $\alpha_1(\vartheta X) = \frac{1}{2}\,\alpha_0(\vartheta X)\,n(\vartheta X) =$

$= \frac{1}{2}\,\alpha_1(X)\,(2\,n(X) - 2) = \alpha_1(X)\,(n(X) - 1) = \frac{1}{2}\,\alpha_0(X)\,(n(X) - 1) =$

$= \alpha_0(X)\binom{n(X)}{2}$. Für diesen Beweis ist (3.4.b) nicht notwendig.

(3.7) *Satz. ϑX ist dann und nur dann zusammenhängend, wenn X entweder zusammenhängend ist, oder alle seine zusammenhängenden Teile, mit einer einzigen Ausnahme, isolierte Punkte sind.*

Beweis. Sei X_1 ein zusammenhängender Teil von X, der mindestens eine Kante enthält. Seien v_0, v_n zwei beliebige Knotenpunkte aus $V(X_1)$. Dann gibt es eine Folge $\langle v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{i-1}, e_i, v_i, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n\rangle$; $v_i \varepsilon\, V(X)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$; $e_i \varepsilon\, E(X)$ für $i = 1, \ldots, n$; $h_X\langle e_i, 1\rangle = v_{i-1}$; $h_X\langle e_i, 2\rangle = v_i$, die v_0 mit v_n verbindet. Dann verbindet $\langle e_1, f_1, \ldots, e_i, f_i, e_{i+1}, \ldots, f_{n-1}, e_n\rangle$; $e_i \varepsilon\, V(\vartheta X)$; $f_i = [\langle e_i, 2\rangle, \langle e_{i+1}, 1\rangle] \varepsilon$ $\varepsilon\, E(\vartheta X)$; $[h_{\vartheta X}\langle[\langle e_i, 2\rangle, \langle e_{i+1}, 1\rangle], 1\rangle, h_{\vartheta X}\langle[\langle e_i, 2\rangle, \langle e_{i+1}, 1\rangle], 2\rangle] =$ $= e_i, e_{i+1}]$ e_1 mit e_n. Da man zu jedem Paar e_1, e_n ein entsprechendes Paar v_0, v_n (wie oben) finden kann, ist ϑX_1 zusammenhängend. Es liefert also jeder zusammenhängende Teil von X, der mindestens eine Kante enthält, einen zusammenhängenden Teil von ϑX. Trivialerweise liefern isolierte Punkte von X keinen Beitrag zu ϑX.

(3.8) *Definition.* Ist X ein Graph und Φ eine Charakterisierung der Knotenpunkte von X, so wollen wir unter einer Φ-Klassen-Einteilung eine Klasseneinteilung aller Knotenpunkte von X verstehen, derart, daß zwei Knotenpunkte dann und nur dann in einunddieselbe Klasse (Φ-Klasse genannt) eingeteilt werden, wenn sie bezüglich Φ gleichartig sind.

(3.9) *Anmerkung.*

(a) Jeder Graph hat eine Grad-Klassen-Einteilung, die Knotenpunkte gleichen Grades zusammengefaßt.

(b) Jeder Graph hat eine Komponenten-Klassen-Einteilung, die zwei Knotenpunkte dann und nur dann einer Klasse zuteilt, wenn sie durch einen Weg verbunden sind (Komponente = zusammenhängender Teil).

(c) Jeder gefärbte Graph (d. h. Graph X + Farbenzuordnung φ) hat eine Farben-Klassen-Einteilung.

(d) Die Farben-Klassen-Einteilung eines zusammenhängenden Graphen X mit der Farbenzahl $\chi(X) = 2$ ist durch den Graphen X allein eindeutig bestimmt.

(3.10) *Satz.*

(a) *ϑX ist dann und nur dann ein Graph im engeren Sinne, wenn X ein Graph im engeren Sinne ist.*

(b) *ϑX ist dann und nur dann ein zpezieller Graph, wenn X ein spezieller Graph ist.*

Beweis. Wir werden die folgenden vier Sachverhalte beweisen:

1. Wenn X eine Schlinge enthält, dann enthält ϑX eine Schlinge.

2. Wenn ϑX eine Schlinge enthält, dann enthält X eine Schlinge

3. Wenn X eine mehrfache Kante enthält, dann enthält ϑX eine mehrfache Kante.

4. Wenn X und ϑX Graphen im engeren Sinne sind und wenn ϑX eine mehrfache Kante enthält, dann enthält auch X eine mehrfache Kante.

1. X enthalte eine Schlinge e, d. h. $e \in E(X)$, $h_X\langle e, 1\rangle = h_X\langle e, 2\rangle$. Dann ist $[\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle] \in E(\vartheta X) = \{[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e', e'' \in E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e'', i''\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle\}$. Wegen $[h_{\vartheta X}\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], 1\rangle, h_{\vartheta X}\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], 2\rangle] = [e', e'']$ ist $[h_{\vartheta X}\langle[\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle], 1\rangle, h_{\vartheta X}\langle[\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle], 2\rangle] = [e, e]$, also $h_{\vartheta X}\langle[\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle], 1\rangle = h_{\vartheta X}\langle[\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle], 2\rangle$, d. h. $[\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle]$ ist eine Schlinge in ϑX.

2. ϑX enthalte eine Schlinge $\bar{e}$, d. h.

$\bar{e} \varepsilon E(\vartheta X) = \{[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \neq \langle e'', i''\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle\}$ und $h_{\vartheta X}\langle \bar{e}, 1\rangle = h_{\vartheta X}\langle \bar{e}, 2\rangle$. $\bar{e} = [\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], [h_{\vartheta X}\langle \bar{e}, 1\rangle, h_{\vartheta X}\langle \bar{e}, 2\rangle] = [e', e'']$, also $e' = e''$, wir schreiben dafür einfach $= e$. $\bar{e} = [\langle e, i'\rangle, \langle e, i''\rangle]$; $e \varepsilon E(X)$; $i', i'' = 1, 2$; $\langle e, i'\rangle \neq \langle e, i''\rangle$, demnach $\bar{e} = [\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle]$ und $h_X\langle e, 1\rangle = h_X\langle e, 2\rangle$; d. h., daß e eine Schlinge in X ist.

3. X enthalte eine mehrfache Kante, d. h. mindestens zwei Kanten e_1, $e_2 \varepsilon E(X)$, $e_1 \neq e_2$, derart, daß $[h_X\langle e_1, 1\rangle, h_X\langle e_1, 2\rangle] = [h_X\langle e_2, 1\rangle, h_X\langle e_2, 2\rangle]$; d. h. $h_X\langle e_1, 1\rangle = h_X\langle e_2, i_1\rangle, h_X\langle e_1, 2\rangle = h_X\langle e_2, i_2\rangle$; $i_1, i_2 = 1, 2$; $i_1 \neq i_2$. Dann sind $[\langle e_1, 1\rangle, \langle e_2, i_1\rangle]$ und $[\langle e_1, 2\rangle, \langle e_2, i_2\rangle]$ Elemente aus $E(\vartheta X) = \{[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \neq \langle e'', i''\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle\}$ und

$[h_{\vartheta X}\langle[\langle e_1, 1\rangle, \langle e_2, i_1\rangle], 1\rangle, h_{\vartheta X}\langle[\langle e_1, 1\rangle, \langle e_2, i_1\rangle], 2\rangle] = [e_1, e_2]$,

$[h_{\vartheta X}\langle[\langle e_1, 2\rangle, \langle e_2, i_2\rangle], 1\rangle, h_{\vartheta X}\langle[\langle e_1, 2\rangle, \langle e_2, i_2\rangle], 2\rangle] = [e_1, e_2]$,

womit wir die Existenz einer mehrfachen Kante in ϑX bewiesen haben.

4. Seien X und ϑX Graphen im engeren Sinne, und ϑX enthalte eine mehrfache Kante, d. h. mindestens zwei Kanten $\bar{e}_1$ und $\bar{e}_2$ aus $E(\vartheta X)$, $\bar{e}_1 \neq \bar{e}_2$, derart, daß $[h_{\vartheta X}\langle \bar{e}_1, 1\rangle, h_{\vartheta X}\langle \bar{e}_1, 2\rangle] = [h_{\vartheta X}\langle \bar{e}_2, 1\rangle, h_{\vartheta X}\langle \bar{e}_2, 2\rangle]$, wir schreiben dafür einfach $= [e_1, e_2]$, wobei $e_1 \neq e_2$, weil ϑX ein Graph im engeren Sinne ist. $\bar{e}_1, \bar{e}_2 \varepsilon E(\vartheta X) = \{[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e'', i''\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle\}$, $\bar{e}_1 = [\langle e'_1, i_1'\rangle, \langle e_1'', i_1''\rangle], \bar{e}_2 = [\langle e_2', i_2'\rangle, \langle e_2'', i_2''\rangle], [h_{\vartheta X}\langle \bar{e}_1, 1\rangle, h_{\vartheta X}\langle \bar{e}_1, 2\rangle] = [e_1', e_1''] = = [e_1, e_2]$, $[h_{\vartheta X}\langle \bar{e}_2, 1\rangle, h_{\vartheta X}\langle \bar{e}_2, 2\rangle] = [e_2', e_2''] = [e_1, e_2]$. $\bar{e}_1 = [\langle e_1, i_1'\rangle, \langle e_2, i_1''\rangle], \bar{e}_2 = [\langle e_1, i_2'\rangle, \langle e_2, i_2''\rangle], h_X\langle e, i_1'\rangle = h_X\langle e_2, i_1''\rangle, h_X\langle e_1, i_2'\rangle = = h_X\langle e_2, i_2''\rangle$. Wegen $\bar{e}_1 \neq \bar{e}_2$ gilt mindestens eine der beiden Ungleichungen $i_1' \neq i_2'$, $i_1'' \neq i_2''$. Angenommen $i_1' = i_2'$, also $i_1'' \neq i_2''$, $\langle e_1, i_1'\rangle = \langle e_1, i_2'\rangle$, somit $h_X\langle e_2, i_1''\rangle = h_X\langle e_2, i_2''\rangle, h_X\langle e_2, 1\rangle = h_X\langle e_2, 2\rangle$, und e_2 wäre eine Schlinge in X, was der Annahme widerspricht, daß X ein spezieller Graph ist. Also ist $i_1' \neq i_2'$ *und* $i_1'' \neq i_2''$.

$[h_X\langle e_1, i_1'\rangle, h_X\langle e_1, i_2'\rangle] = [h_X\langle e_1, 1\rangle, h_X\langle e_1, 2\rangle], [h_X\langle e_1, i_1'\rangle, h_X\langle e_1, i_2'\rangle] = = [h_X\langle e_2, i_1''\rangle, h_X\langle e_2, i_2''\rangle] = [h_X\langle e_2, 1\rangle, h_X\langle e_2, 2\rangle], [h_X\langle e_1, 1\rangle, h_X\langle e_1, 2\rangle] = = [h_X\langle e_2, 1\rangle, h_X\langle e_2, 2\rangle]$, und d. h., daß X eine mehrfache Kante enthält.

(3.11) *Satz. Wenn X und ϑX spezielle Graphen sind, kann ϑX auch durch folgende vereinfachten Formeln wiedergegeben werden:*

$V(\vartheta X) = E^*(X)$,

$E^*(\vartheta X) = \{[[i, j], [k, l]] \mid [i, j], [k, l] \varepsilon E^*(X); [i, j] \neq [k, l]; (i \cup j) \cap (k \cup l) \neq \varnothing\}$.

Beweis. Da X ein spezieller Graph ist, kann man X als durch $V(X)$ und $E^*(X)$ gegeben annehmen. $V(\vartheta X) = E^*(X)$,

$E(\vartheta X) = \{[\langle[i, j], i'\rangle, \langle[k, l], i''\rangle] \mid [i, j], [k, l] \varepsilon E^*(X); i', i'' = 1, 2; \langle[i, j], i'\rangle \neq \langle[k, l], i''\rangle; h_X\langle[i, j], i'\rangle = h_X\langle[k, l], i''\rangle\}$.

Angenommen nun, es wäre $[i, j] = [k, l]$, dann folgte daraus wegen $\langle[i, j], i'\rangle \neq \langle[k, l], i''\rangle$, daß $i' \neq i''$ und daß $h_X\langle[i, j], i'\rangle = h_X\langle[i, j], i''\rangle$, also $h_X\langle[i, j], 1\rangle = h_X\langle[i, j], 2\rangle$ wäre, was unmöglich ist, da X ein spezieller Graph ist und daher keine Schlinge enthält. Also ist $[i, j] \neq [k, l]$. $\langle[i, j], i'\rangle \neq \langle[k, l], i''\rangle$ kann durch $[i, j] \neq [k, l]$ ersetzt werden. $E(\vartheta X) = \{[\langle[i, j], i'\rangle, \langle[k, l], i''\rangle] \mid [i, j], [k, l] \varepsilon E^*(X); i', i'' = 1, 2; [i, j] \neq [k, l]; h_X\langle[i, j], i'\rangle = h_X\langle[k, l], i''\rangle\}$. Angenommen, es wäre $h_X\langle[i, j], 1\rangle = h_X\langle[k, l], i''\rangle$ und $h_X\langle[i, j], 2\rangle = h_X\langle[k, l], i''\rangle$. Dann folgte $h_X\langle[i, j], 1\rangle = h_X\langle[i, j], 2\rangle$ und $[i, j]$, wäre eine Schlinge in X, obwohl X ein spezieller Graph ist. Also ist i' durch i'' eindeutig bestimmt; und natürlich auch umgekehrt.

Angenommen aber, es wäre $h_X\langle[i, j], 1\rangle = h_X\langle[k, l], i_1\rangle$ und $h_X\langle[i, j], 2\rangle = h_X\langle[k, l], i_2\rangle$, $i_1 \neq i_2$. Dann wäre $[h_X\langle[i, j], 1\rangle, h_X\langle[i, j], 2\rangle] = [h_X\langle[k, l], i_1\rangle, h_X\langle[k, l], i_2\rangle] = [h_X\langle[k, l\rangle, 1\rangle, h_X\langle[k, l], 2\rangle]$ und der als speziell angenommene Graph enthielte eine mehrfache Kante. Man sieht, daß i' und i'' durch die übrigen Bedingungen eindeutig festgelegt sind. Sie sind zur Charakterisierung nicht notwendig, d. h. man kann $[\langle[i, j], i'\rangle, \langle[k, l], i''\rangle]$ durch $[[i, j], [k, l]]$ ersetzen. Nur muß dann die Bedingung $h_X\langle[i, j], i'\rangle = h_X\langle[k, l], i''\rangle$ entsprechend wiedergegeben werden. Es gilt

$[h_X\langle[i, j], 1\rangle, h_X\langle[i, j], 2\rangle] = [i, j]$ und analog

$[h_X\langle[k, l], 1\rangle, h_X\langle[k, l], 2\rangle] = [k, l]$. Daher bedeutet

$h_X\langle[i, j], i'\rangle = h_X\langle[k, l], i''\rangle$, daß $[i, j]$ und $[k, l]$ einen Knotenpunkt von X gemeinsam haben, daß also $(i \cup j) \cap (k \cup l) \neq \varnothing$ ist.

$E(\vartheta X) = \{[[i, j], [k, l]] \mid [i, j], [k, l] \varepsilon E^*(X); [i, j] \neq [k, l]; (i \cup j) \cap (k \cup l) \neq \varnothing\}$. Schließlich ist

$[h_{\vartheta X}\langle[\langle[i, j], i'\rangle, \langle[k, l], i''\rangle], 1\rangle, h_{\vartheta X}\langle[\langle[i, j], i'\rangle, \langle[k, l], i''\rangle], 2\rangle] = [[i, j], [k, l]]$, woraus

$[h_{\vartheta X}\langle[[i, j], [k, l]], 1\rangle, h_{\vartheta X}\langle[[i, j], [k, l]], 2\rangle] = [[i, j], [k, l]]$ wird. Damit ist alles bewiesen.

(3.12) *Satz. Sind X und ϑX spezielle Graphen, ist ϑX regulär und X zusammenhängend, aber nicht regulär, dann gibt es einen Graphen $F(k, l)$, so daß $X \preceq F(k, l)$, also $\chi(X) = 2$, und die Grad-Klassen-Einteilung von X ist der Farben-Klasseneinteilung von X gleich* (*vgl.* (2.14), (2.15), (2.17), (3.8) und (3.9)).

Beweis. Zunächst gibt Satz (2.17) nur $\chi(X) \leqq 2$. Da ein Graph ohne Kanten aber regulär ist, hat X mindestens eine Kante, und

folglich $\chi(X) = 2$. Da X nicht regulär ist, hat X auch mindestens zwei Grad-Klassen. Sei $K_r = \{v \mid v \varepsilon V(X); d_X(v) = r\}$, $K_s = \{v \mid v \varepsilon V(X); d_X(v) = s\}$, $r \neq s$; $K_r \neq \varnothing$; $K_s \neq \varnothing$. Da X zusammenhängend ist, gibt es mindestens eine Kante $[v_r, v_s] \varepsilon E^*(X)$, $v_r \varepsilon K_r$, $v_s \varepsilon K_s$.

$d_{\vartheta X}[v_r, v_s] = d_X(v_r) + d_X(v_s) - 2 = r + s - 2$. ϑX ist regulär, also $n(\vartheta X) = r + s - 2$. Angenommen, es gäbe eine dritte Grad-Klasse $K_t = \{v \mid v \varepsilon V(X); d_X(v) = t\}$, $t \neq r$, $t \neq s$, $K_t \neq \varnothing$. Dann muß es wie oben auch eine Kante $[v_r', v_t] \varepsilon E^*(X)$, $v_r' \varepsilon K_r$, $v_t \varepsilon K_t$ geben. $d_{\vartheta X}[v_r', v_t] = d_X(v_r') + d_X(v_t) - 2 = r + t - 2$; $n(\vartheta X) = r + s - 2, r + t - 2 = r + s - 2$, $s = t$, Wid. Also gibt es genau die beiden Grad-Klassen K_r und K_s. Da $r + r - 2 \neq r + s - 2 \neq s + s - 2$ ist, verbindet jede Kante aus $E^*(X)$ einen Knotenpunkt aus K_r mit einem Knotenpunkt aus K_s. Sei $k = \operatorname{ord} K_r$, $l = \operatorname{ord} K_s$, dann ist $X \trianglelefteq F(k, l)$. Da $\chi(X) = 2$ und X zusammenhängend ist, ist die Farben-Klassen-Einteilung eindeutig bestimmt. Offenbar fallen die Farben-Klassen mit K_r und K_s zusammen.

(3.13) *Anmerkung.* Unter den Bedingungen von Satz (3.12) ist

(a) $\alpha_1(X) = kr = ls$,

(b) $n(\vartheta X) = r + s - 2$,

(c) $\alpha_1(X) = k\binom{r}{2} + l\binom{s}{2}$.

Beweis. (a) ist aus dem Vorhergehenden offenbar, (b) kam während des Beweises explizit vor. (c) folgt aus (3.4.b), oder auch aus (1.11.ii) mit (3.13.a und b).

(3.14) *Satz.* $\vartheta F(k, l) = C_k \times C_l$. *Dabei bedeutet* $C_k \times C_l$ *das Sabidussische Graphenprodukt von* C_k *und* C_l; *vgl.* [12] *und* [14].

Beweis. $V(F(k, l)) = \{a_i \mid i = 1, \ldots, k\} \cup \{b_j \mid j = 1, \ldots, l\}$,
$E^*(F(k, l)) = \{[a_i, b_j] \mid i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, l\} = V(\vartheta F(k, l))$,
$E^*(\vartheta F(k, l)) = \{[[i, j], [p, q]] \mid [i, j], [p, q] \varepsilon E^*(F(k, l)); [i, j] \neq [p, q]; (i \cup j) \cap (p \cup q) \neq \varnothing\} = \{[[a_i, b_j], [a_p, b_q]] \mid 1 \leqq i \leqq k, 1 \leqq p \leqq k, 1 \leqq j \leqq l, 1 \leqq q \leqq l, [a_i, b_j] \neq [a_p, b_q], (a_i \cup b_j) \cap (a_p \cup b_q) \neq \varnothing\} = \{[[a_i, b_j], [a_p, b_q]] \mid 1 \leqq i \leqq k, 1 \leqq j \leqq l, 1 \leqq p \leqq k, 1 \leqq q \leqq l$; entweder $a_i = a_p, b_j \neq b_q$, oder $a_i \neq a_p, b_j = b_q\}$.

Während des letzten Schrittes wurde benützt, daß $\{a_i\}$ und $\{b_j\}$ elementfremde Mengen sind. Aus demselben Grunde können wir auch die ungeordneten Paare $[a_i, b_j]$ durch geordnete Paare $\langle a_i, b_j \rangle$ ersetzen, und wir erhalten
$V(\vartheta F(k, l)) = \{\langle a_i, b_j \rangle \mid i = 1, \ldots k; j = 1, \ldots l\}$,
$E^*(\vartheta F(k, l)) = \{[\langle a_i, b_j \rangle, \langle a_p, b_q \rangle] \mid 1 \leqq i \leqq k, 1 \leqq j \leqq l, 1 \leqq p \leqq k, 1 \leqq q \leqq l$; entweder $a_i = a_p, b_j \neq b_q$, oder $a_i \neq a_p, b_j = b_q\}$, also $\vartheta F(k, l) = C_k \times C_l$.

(3.15) *Satz. Ist X ein zusammenhängender Graph, $X \preceq F(k, l)$, ϑX regulär, so ist $d_X(a_i)=r$ (eine nat. Zahl) gleich für alle a_i $(i=1, \ldots, k)$ und $d_X(b_j)=s$ (eine nat. Zahl) gleich für alle $b_j (j=1, \ldots, l)$; $r+s-2=n(\vartheta X)$. Ist weiters $r \geqq 2$, $s \geqq 2$, so läßt sich ϑX in zwei reguläre Faktoren der Grade $r-1$ und $s-1$ zerlegen.*

Beweis. Wegen $X \preceq F(k, l)$ ist X, und daher auch ϑX, ein spezieller Graph. $V(X) = \{a_i \mid i=1, \ldots, k\} \cup \{b \mid j=1, \ldots, l\}$, $E^*(X) \subseteq \{[a_i, b_j] \mid i=1, \ldots, k; j=1, \ldots, l\}$. Da X zusammenhängend ist, gibt es mindestens eine Kante $[a_i, b_j]$. Wir wollen die a_i und b_j so numeriert annehmen, daß es $[a_1, b_1]$ ist, $d_X(a_1) = r \geqq 1$, $d_X(b_1) = s \geqq 1$. Gibt es noch weitere b_j, so muß es (o.B.d.A.) ein b_2 derart geben, daß $[a_1, b_2] \varepsilon E^*(X)$ ist. $d_X(b_2) = s'$. $d_X(a_1) + d_X(b_1) - 2 = n(\vartheta X)$ (nach (3.2)), ebenso $d_X(a_1) + d_X(b_2) - 2 = n(\vartheta X)$, also $r + s - 2 = r + s' - 2 = n(\vartheta X)$, $s = s'$. Gibt es noch weitere a_i, so muß es (o.B.d.A.) ein a_2 derart geben, daß $[a_2, b_1]$ oder $[a_2, b_2] \varepsilon E^*(X)$. $d_X(a_2) = r'$, $r = r'$. Da X zusammenhängend ist, kann man auf diese Weise so lange fortfahren, bis alle Knotenpunkte aus $V(X)$ erfaßt sind.

Nun sei $r \geqq 2$, $s \geqq 2$. Die mit einem a_i verbundenen Knotenpunkte mögen auch $b^{ig}(g = 1, \ldots, r)$ heißen; die mit einem b_j verbundenen entsprechend $a^{jh}(h = 1, \ldots, s)$. Dann ist $E^*(\vartheta X) = \{[[a_i, b^{ig}], [a_i, b^{ig'}]] \mid i = 1, \ldots, k; g = 1, \ldots, r; g' = 1, \ldots, r; g \neq g'\} \cup \{[[b_j, a^{jh}], [b_j, a^{jh'}]] \mid j = 1, \ldots, l; h = 1, \ldots, s; h' = 1, \ldots, s; h \neq h'\}$. Offenbar definieren die beiden soeben angeschriebenen Mengen reguläre Faktoren von ϑX und die Grade sind $r - 1$ resp. $s - 1$.

(3.16) *Satz. Ist X regulär und ϑX ein vollständiger Graph, so ist entweder $X = C_2$, $\vartheta X = C_1$, oder $X = C_3$, $\vartheta X = C_3$.*

Beweis. Da ϑX ein vollständiger Graph ist, ist ϑX — und daher auch X — ein spezieller Graph. Sei $\alpha_0(X) = a$, $n(X) = n$, dann $\alpha_1(X) = \frac{1}{2}\alpha_0(X) n(X) = \frac{1}{2}an = \alpha_0(\vartheta X)$, $\vartheta X = C_{\frac{1}{2}an}$. $n(\vartheta X) = 2n(X) - 2 = 2n - 2$. $n(\vartheta X) = n(C_{\frac{1}{2}an}) = \frac{1}{2}an - 1 = \frac{1}{2}(an - 2)$. $2n - 2 = \frac{1}{2}(an - 2)$, $4n - 4 = an - 2$, $(4 - a) n = 2$, entweder $n = 1$, oder $n = 2$.

1. $n = 1, 4 - a = 2, a = 2, \alpha_0(X) = 2, n(X) = 1, X = C_2, \vartheta X = C_1$.
2. $n = 2, 4 - a = 1, a = 3, \alpha_0(X) = 3, n(X) = 2, X = C_3, \vartheta X = C_3$.

(3.17) *Satz. Zu jedem vollständigen Graphen $C_n (n \geqq 1, n \neq 3)$ gibt es, sieht man von isolierten Punkten ab, einen eindeutig bestimmten Graphen X, so daß $\vartheta X = C_n$, und zwar ist $X = F(n, 1)$. Für $n = 3$ gibt es genau zwei solche Graphen, $X = F(3, 1)$ und $X = C_3$.*

Beweis. Daß für die angegebenen Graphen X stets $\vartheta X = C_n$ gilt, ist offenbar. Wir haben also noch zu zeigen, daß wir hiermit schon alle den Anforderungen genügenden Graphen kennen. Da C_n speziell ist, ist auch X speziell. X kann entweder regulär oder nicht regulär sein.

1. Sei X regulär. Dann ist laut Satz (3.16) entweder $X = C_2 \cong F(1, 1)$, $\vartheta X = C_1$, oder $X = C_3$, $\vartheta X = C_3$.

2. Ist X nicht regulär, dann gibt es nach Satz (3.12) einen Graphen $F(k, l)$ derart, daß $X \preceq F(k, l)$. Nach Satz (3.14) ist $\vartheta F(k, l) = C_k \times C_l$. Aus $X \preceq F(k, l)$ folgt $\vartheta X \subseteq \vartheta F(k, l)$, also $C_n \subseteq C_k \times C_l$, $n = k$, $l = 1$ (oder, gleichbedeutend, $k = 1$, $n = l$), $X \preceq F(n, 1)$. Läßt man in $F(n, 1)$ auch nur eine einzige Kante fort, so ergibt sich ein isolierter Punkt. Es ist also, da wir von isolierten Punkten absehen, $X = F(n, 1)$. Nebenbei bemerkt ist $F(n, 1)$ genau dann nicht regulär, wenn $n \neq 1$ ist.

(3.18) *Satz. Sei Y ein spezieller Graph, dessen Kanten sich derart in Klassen $E_i(Y)$ einteilen lassen, daß*

a) *die Kanten einer jeden Klasse einen vollständigen Graphen C_{n_i} bilden,*

b) *in jedem Knotenpunkt aus $V(Y)$ sich höchstens zwei Klassen treffen; dann, und nur dann, gibt es mindestens einen speziellen Graphen X derart, daß $\vartheta X = Y$.* (3.18)

Beweis. Sei m die Anzahl der Klassen $E_i(Y)$ $(i = 1, \ldots, m)$, n die Anzahl jener Knotenpunkte $v \varepsilon V(Y)$, bei denen alle mit v inzidenten Kanten zu einundderselben Klasse gehören. Dann sei $V(X) = \{i \mid i = 1, \ldots, m + n\}$. Treffen sich in einem Punkte aus $V(Y)$ zwei Klassen $E_i(Y)$ und $E_j(Y)$, so soll er $[i, j]$ heißen; es ist offenbar, $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq m$. Treffen sich in einem Punkt $v \varepsilon V(Y)$ nur Kanten aus einer einzigen Klasse $E_k(Y)$, so soll er $[k, m + v]$ heißen, wobei v für jeden solchen Punkt einen anderen Wert zwischen 1 und n annehmen soll. Das geht sich genau aus, weil es genau n solcher Punkte gibt. Jeder Punkt aus $V(Y)$ ist jetzt durch ein Zahlenpaar benannt. Dann sei $E^*(X) = V(Y)$.

Nun sei e irgendeine Kante aus $E^*(Y)$. Sie muß einer Klasse $E_i(Y)$ angehören. Daher hat sie die Form $e = [[i, a], [i, b]]$.

Wir haben $E_i(Y) = \{[[i, a], [i, b]] \mid [i, a], [i, b] \varepsilon V_i(Y), a \neq b\}$, wobei mit $V_i(Y)$ die Menge der Endpunkte aller Kanten aus $E_i(Y)$ gemeint ist. Weiters $E^*(Y) = \{[[i, a], [i, b]] \mid [i, a], [i, b] \varepsilon V(Y), a \neq b\}$. Zusammen mit $V(Y) = E^*(X)$ bedeutet das, daß $Y = \vartheta X$.

Sei umgekehrt X ein beliebiger spezieller Graph mit m Knotenpunkten mindestens 2. Grades und n Knotenpunkt 1. Grades. Dann

hat ϑX offenbar die Gestalt eines der oben beschriebenen Graphen Y. Eine Klasse ist dabei die Menge aller Kanten von ϑX, die aus einem einzigen Knotenpunkt von X hervorgehen.

Sollte Y noch isolierte Punkte enthalten, so entsprechen ihnen isolierte Kanten von X, und umgekehrt.

(3.19) *Satz. Sei Y ein spezieller Graph, der eine Klasseneinteilung $E^*(Y) = \sum_i E_i(Y)$ im Sinne von Satz* (3.18) *zuläßt. Enthält Y einen vollständigen Graphen C_n mit $n \geqq 4$ Knotenpunkten als Untergraphen, so gehören alle Kanten von C_n zu einundderselben Klasse $E_i(Y)$.*

Beweis. Angenommen, die Kanten von C_n, $n \geqq 4$, gehören zu mindestens zwei Klassen, E_1, und E_2. Dann muß C_n einen Knotenpunkt enthalten, wo zwei Kanten verschiedener Klassen zusammenstoßen. Wir wollen die Knotenpunkte von C_n derart mit $1, 2, \ldots, n$ numerieren, daß $[1, 2] \varepsilon E_1$, $[2, 3] \varepsilon E_2 \neq E_1$. Da in einem Punkt nicht mehr als zwei Klassen zusammentreffen dürfen, gehören auch $[2, 4], \ldots, [2, n]$ zu E_1 oder E_2. Sei o.B.d.A. $[2, 4] \varepsilon E_1$, dann ist wegen $[1, 2] \varepsilon E_1$ auch $[1, 4] \varepsilon E_1$. Betrachten wir nun $[1, 3]$: Wäre $[1, 3] \varepsilon E_1$, dann wäre wegen $[1, 2] \varepsilon E_1$ auch $[2, 3] \varepsilon E_1$, Wid. Wäre $[1, 3] \varepsilon E_2$, dann wäre wegen $[2, 3] \varepsilon E_2$ auch $[1, 2] \varepsilon E_2$, Wid. Also muß $[1, 3]$ einer dritten Klasse E_3 angehören. Nun nehmen wir $[3, 4]$ vor. Da in einem Punkt nicht mehr als zwei Klassen zusammentreffen dürfen, und da $[2, 3] \varepsilon E_2$, $[1, 3] \varepsilon E_3$ ist, ist $[3, 4] \varepsilon E_2$ oder εE_3. Wäre $[3, 4] \varepsilon E_2$, dann wäre wegen $[2, 3] \varepsilon E_2$ auch $[2, 4] \varepsilon E_3$, Wid. Wäre $[3, 4] \varepsilon E_3$, dann wäre wegen $[1, 3] \varepsilon E_3$ auch $[1, 4] \varepsilon E_3$, Wid. Ein Widerspruch ist demnach nicht zu vermeiden, alle Kanten von C_n, $n \geqq 4$, gehören zu derselben Klasse.

(3.20) *Satz. Sei Y ein spezieller Graph mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Y enthält zwei nicht identische vollständige Graphen A_m und B_n, $m \geqq 4$, $n \geqq 4$, als Untergraphen.*

b) *A_m und B_n haben mindestens eine Kante gemeinsam.*

c) *Y enthält nicht den von A_m und B_n gemeinsam aufgespannten vollständigen Graphen C_l als Untergraphen.*

Dann gibt es keinen speziellen Graphen X mit $\vartheta X = Y$.

Beweis. Angenommen, Y läßt eine Klasseneinteilung im Sinne von Satz (3.18) zu. Nach Satz (3.19) gehören alle Kanten von A_m zu einundderselben Klasse; ebenso alle von B_n. Da die beiden mindestens eine Kante gemeinsam haben, gehören alle Kanten, die zu mindestens einem der beiden Graphen A_m und B_n gehören, zu derselben Klasse. Nach Bedingung (3.18.a) enthält Y dann auch den vollständigen

Graphen C_l, der von A_m und B_n gemeinsam aufgespannt wird. Wid. Also läßt Y keine solche Klasseneinteilung zu. Es folgt aus Satz (3.18), daß es keinen speziellen Graphen X geben kann, so daß $\vartheta X = Y$ wäre.

(3.21) *Satz. Sei Y ein spezieller Graph, dessen Kanten sich derart in Klassen $E_i(Y)$ einteilen lassen, daß*

a) *die Kanten einer jeden Klasse einen vollständigen Graphen C_{n_i}, $n_i \geqq 4$, bilden;*

b) *in jedem Knotenpunkt aus $V(Y)$ sich höchstens zwei Klassen treffen; dann gibt es genau einen speziellen Graphen X, so daß $\vartheta X = Y$.*

Beweis. Nach Satz (3.18) gibt es mindestens einen solchen Graphen X. Nach Satz (3.19) läßt Y nur eine Klasseneinteilung im Sinne von Satz (3.18) zu. Gäbe es zwei Graphen, X_1 und X_2, die den Bedingungen genügten, dann müßte es auch zwei Klasseneinteilungen im Sinne von Satz (3.18) geben. Also ist X eindeutig bestimmt.

(3.22) *Satz.* (a) $G_E(X) \subseteqq G_V(\vartheta X)$.

(b) *Es gibt eine Gruppe* $\mathfrak{G}$, *so daß* $G_V(X) \cong \mathfrak{G} \subseteqq G_E(\vartheta X)$.

Beweis.

(a) Sei $g \varepsilon G_E(X)$. $X \cong gX$, $\vartheta X \cong \vartheta gX$, ϑX und ϑgX unterscheiden sich also nur durch die Bezeichnungsweise. Dabei hat g auf den Knotenpunkten von ϑX agiert: $g \varepsilon G_V(\vartheta X)$, $G_E(X) \subseteqq G_V(\vartheta X)$.

(b) Sei $g \varepsilon G_V(X)$, $X \cong gX$, $\vartheta X \cong \vartheta gX$, ϑX und ϑgX unterscheiden sich wieder nur durch die Bezeichnungsweise. Diesmal hat g aber auf Klassen von Kanten von ϑX agiert. Jedem Knotenpunkt von X entspricht die Menge aller Kanten von ϑX, die bei der ϑ-Transformation aus ihm hervorgehen. Man enthält also bei entsprechender Vervielfältigung der Variablen von g eine Permutation $g' \varepsilon G_E(\vartheta X)$.

Also gibt es eine Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $G_E(\vartheta X)$, die zu $G_V(X)$ isomorph ist.

(3.23) *Folgerung.*

(a) Wenn X keine Fixpunkte hat, dann hat ϑX keine Fixkanten.

(b) Wenn X keine Fixkanten hat, dann hat ϑX keine Fixpunkte.

(3.24) *Satz. Wenn der spezielle Graph ϑX den Bedingungen von Satz* (3.21) *genügt, dann gilt*

(a) $G_E(X) = G_V(\vartheta X)$, *und*

(b) $G_V(X) \cong G_E(\vartheta X)$.

Beweis. Die Behauptung ist eine Folgerung aus Satz (3.22) und der Eindeutigkeit der Klasseneinteilung der Kanten von ϑX.

4. Die Funktion th

(4.1) *Definition.* Sei $N_3=\{3,4,5,\ldots\}$; $a \varepsilon N_3$. Dann ist $th(a)=2a-2$.

(4.2) *Satz.* (a) $th(a) > a$.

(b) $a = b$ *dann und nur dann, wenn* $th(a) = th(b)$.

(c) $th(a) \equiv 0 \pmod 2$.

(d) *Wenn* $a \varepsilon N_3$ *und* $a \equiv 0 \pmod 2$, *dann gibt es ein eindeutig bestimmtes* $b \varepsilon N_3$, *so daß* $th(b) = a : b = th^{-1}(a) = \frac{a}{2} + 1$.

(e) $th^{-1}(a) < a$.

(f) *Wendet man auf eine natürliche Zahl* $a \varepsilon N_3$ *immer wieder* th^{-1} *an, solange bis das nicht mehr möglich ist, so erreicht man nach endlich vielen Schritten eine Zahl* $\alpha(a) = th^{-k}(a)$, $\alpha(a) \equiv 1 \pmod 2$, $\alpha(a) \varepsilon N_3$.

(4.3) *Satz.* $th^k(a) = 2^k a - 2^{k+1} + 2$.

Beweis.

1. $k = 0 : th^0(a) = 2^0 a - 2^1 + 2 = a$.
2. Induktions-Voraussetzung: $th^{k-1}(a) = 2^{k-1} a - 2^k + 2$.
   Induktions-Behauptung: $th^k(a) = 2^k a - 2^{k+1} + 2$.
   Induktions-Beweis: $th^k(a) = th(th^{k-1}(a)) = th(2^{k-1} a - 2^k + 2) =$
   $= 2(2^{k-1} a - 2^k + 2) - 2 = 2^k a - 2^{k+1} + 2$.

(4.4) *Satz. Wenn* $a = th^k(\alpha(a))$, *dann*

(i) $k = max\{i \mid a - 2 \equiv 0 (mod\ 2^i)\}$,

(ii) $\alpha(a) = 2^{-k} a - 2^{1-k} + 2$.

Beweis. Aus Satz (4.2.f): $\alpha(a) \equiv 1 \pmod 2$, $\alpha(a) = 2n + 1$.

Aus Satz (4.3): $th^k(2n+1)=2^k(2n+1)-2^{k+1}+2=2^{k+1}n+2^k-2^{k+1}+2=$
$2^{k+1}n-2^k+2=a$, $2^k(2n-1)+2=a$, $2^k(2n-1)=a-2$, $k=\max\{i \mid a-2 \equiv$
$\equiv 0 \pmod{2^i}\}$.

$2n-1=\frac{a-2}{2^k}$, $2n+1=\frac{a-2}{2^k}+2=2^{-k}a-2^{1-k}+2=\alpha(a)$, q.e.d

(4.5) *Bemerkung.* Jede Zahl $a \varepsilon N_3$ läßt sich durch das Zahlenpaar $\langle n, k\rangle$ eindeutig charakterisieren, wobei $th^{-k}(a)=\alpha(a)=2n+1$. Daraus ergibt sich eine neue Variante des Beweises dafür, daß geordnete Paare von abzählbar vielen Elementen selbst eine abzählbare Menge bilden.

(4.6) *Satz. Ist* X *ein regulärer Graph vom Grade* $n(X) \geqq 3$, *so ist*

(a) $n(\vartheta^k X) = th^k(n(X))$,

(b) $\alpha_0(\vartheta^k X) = 2^{-k}\,\alpha_0(X)\prod_{i=0}^{k-1} th^i(n(X))$.

Beweis. (a) folgt unmittelbar aus (3 3).

(b) 1. $n = 0: \alpha_0(X) = 2^0\,\alpha_0(X)\prod_{i=0}^{-1} th^i(n(X)) = \alpha_0(X)$,

$n = 1: \alpha_0(\vartheta X) = \tfrac{1}{2}\,\alpha_0(X)\prod_{i=0}^{0} th^i(n(X)) = \tfrac{1}{2}\,\alpha_0(X)\,n(X) = \alpha_1(X)$.

2. Induktions-Voraussetzung: $\alpha_0(\vartheta^{k-1} X) = 2^{1-k}\,\alpha_0(X)\prod_{i=0}^{k-2} th^i(n(X))$.

Induktions-Behauptung: $\alpha_0(\vartheta^k X) = 2^{-k}\,\alpha_0(X)\prod_{i=0}^{k-1} th^i(n(X))$.

Induktions-Beweis: $\alpha_0(\vartheta^k X) = \alpha_1(\vartheta^{k-1}X) = \tfrac{1}{2}\alpha_0(\vartheta^{k-1}X)\,n(\vartheta^{k-1}X) =$

$= \tfrac{1}{2}\cdot 2^{1-k}\alpha_0(X)\prod_{i=0}^{k-2} th^i(n(X))\,th^{k-1}(n(X)) = 2^{-k}\alpha_0(X)\prod_{i=0}^{k-1} th^i(n(X))$.

(4.7) *Satz. Ist X ein spezieller, regulärer Graph vom Grade $n(X) \geqq 4$, ohne Fixpunkte und ohne Fixkanten, dann gibt es für jedes ganze $k \geqq 0$ eine Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$, die genau $\alpha_0(\vartheta^k X) = 2^{-k}\,\alpha_0(X)\prod_{i=0}^{k-1} th^i(n(X))$ Variable hat und $\cong G_V(X)$ ist.*

Beweis. Induktions-Voraussetzung: $\vartheta^{j-1}X$ ist ein spezieller, regulärer Graph vom Grade $n(\vartheta^{j-1}X) \geqq 4$, ohne Fixpunkte, ohne Fixkanten, $G_V(\vartheta^{j-1}X) \cong G_V(X)$.

Induktions-Behauptung: $\vartheta^j X$ hat dieselben Eigenschaften.

Induktions-Beweis: Nach (3.10.b) ist $\vartheta^j X$ ein spezieller Graph.

Nach (4.6.a) ist $\vartheta^j X$ regulär vom Grade $n(\vartheta^j X) = th^j(n(X))$; nach (4.2.a) ist $\mathrm{th}^j(n(X)) > th^{j-1}(n(X)) = n(\vartheta^{j-1}X) \geqq 4$, also $n(\vartheta^j X) \geqq 4$. Nach (3.23) hat $\vartheta^j X$ weder Fixpunkte noch Fixkanten. Da $n(\vartheta^{j-1}X) \geqq 4$ ist, genügt $\vartheta^j X$ den Bedingungen von Satz (3.21); also ist nach (3.24.a) $G_E(\vartheta^{j-1}X) = E_V(\vartheta^j X)$. Da $n(\vartheta^{j-1}X) \geqq 4$, hat $\vartheta^{j-1}X$ keine isolierten Punkte und keine isolierten Kanten, also gilt nach (1.9) $G_V(\vartheta^{j-1}X) \cong$ $\cong G_E(\vartheta^{j-1}X)$. Es folgt $G_V(X) \cong G_V(\vartheta^{j-1}X) \cong G_E(\vartheta^{j-1}X) = G_V(\vartheta^j X)$.

Man setze die Induktion bis $j = k$ fort. Dann ist $\mathfrak{G} = G_V(\vartheta^k X)$ die gesuchte Gruppe. Denn es ist $G_V(\vartheta^k X) \cong G_V(X)$, nach (4.6.b) $\alpha_0(\vartheta^k X) =$ $= 2^{-k}\,\alpha_0(X)\prod_{i=0}^{k-1} th^i(n(X))$ und $\vartheta^k(X)$ hat keine Fixpunkte.

(4.8) *Folgerung.* Seien $n \geqq 5, k \geqq 0$ ganze Zahlen. Dann gibt es eine zu

$\mathfrak{S}_n$ isomorphe Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ mit genau $2^{-k} n \prod_{i=0}^{k-1} th^i(n-1)$ Variablen.

Beweis. Wir nehmen Satz (4.7) und setzen $X = C_n$.

5. Die Transformationen η und ϱ

(5.1) *Definition.* Wenn in einem Graphen X der Knotenpunkt v mit der Kante e inzident ist, dann wollen wir dafür $||: v, X, e: ||$ schreiben.

(5.2) *Definition.* $V(\eta X) = V(X) \cup E(X)$

$$E(\eta X) = \{\langle e, k\rangle \mid e \in E(X); k = 1, 2\},$$

$$h_{\eta X}\langle\langle e, k\rangle, 1\rangle = h_X\langle e, k\rangle; \; h_{\eta X}\langle\langle e, k\rangle, 2\rangle = e.$$

(5.3) *Definition.*

(a) $[:x_1, \ldots, x_c:] = [:y_1, \ldots, y_c:]$ dann und nur dann, wenn entweder $\langle x_1, \ldots, x_c\rangle = \langle y_1, \ldots, y_c\rangle$, oder $\langle x_1, \ldots, x_c\rangle = \langle y_c, \ldots, y_1\rangle$. (Unveränderte oder rückläufige Reihenfolge der Elemente).

(b) $Ch(X) = \{[:x_1, \ldots, x_c:] \mid x_1, \ldots, x_c \in V(X); d_X(x_1) \neq 2; d_X(x_c) \neq 2; d_X(x_2) = d_X(x_3) = \ldots = d_X(x_{c-1}) = 2; e_1, \ldots, e_{c-1} \in E(X); [h_X\langle e_k, 1\rangle, h_X\langle e_k, 2\rangle] = [x_k, x_{k+1}]\}$.

(5.4) *Definition.* $V(\varrho X) = \{x \mid x \in V(X), d_X(x) \neq 2\}$,

$$E(\varrho X) = Ch(X),$$

$$[h_{\varrho X}\langle[:x_1, \ldots, x_c:], 1\rangle, h_{\varrho X}\langle[:x_1, \ldots, x_c:], 2\rangle] = [x_1, x_c]. \tag{5.4}$$

(5.5) *Anmerkung.* η bedeutet das Halbieren jeder Kante. $Ch(X)$ ist die Menge aller Kantenfolgen, deren Endpunkte einen Grad $\neq 2$ haben, deren innere Punkte aber, soweit vorhanden, zweiten Grades sind. ϱ bedeutet das Ersetzen jedes Elementes aus $Ch(X)$ durch eine Kante, also das Nichtbeachten der Knotenpunkte zweiten Grades.

(5.6) *Satz.*

(a) $\alpha_0(\eta X) = \alpha_0(X) + \alpha_1(X)$.

(b) $\alpha_1(\eta X) = 2\,\alpha_1(X)$.

(c) *Wenn* $\alpha_1(X) > 0$, *dann* $\chi(\eta X) = 2$.

(d) *Ist X ein spezieller Graph, so ist* $c(\eta X) = min\,(2, c(X))$.

(e) *ηX hat keine Schlingen.*

(f) *Falls X keine Schlingen hat, ist ηX ein spezieller Graph. In diesem Falle läßt sich für ηX die folgende vereinfachte Schreibweise verwenden:*

$V(\eta X) = V(X) \cup E(X)$,

$E^*(\eta X) = \{[v, e] \mid v \in V(X), e \in E(X), ||: v, X, e: ||\}$.

(g) $d_{\eta X}(e) = 2$.

(h) $d_{\eta X}(v) = d_X(v)$.

(i) $G_V(\eta X) = G_{VE}(X)$.

(5.7) *Satz.*

(a) *ϱX braucht kein spezieller Graph zu sein, auch wenn X es ist. Bezeichnen wir mit $\alpha_0(X, 2)$ die Anzahl aller Knotenpunkte von X, deren Grad $d_X(v) = 2$ ist, so ist*

(b) $\alpha_0(\varrho X) = \alpha_0(X) - \alpha_0(X, 2)$.

(c) $\alpha_1(\varrho X) = \alpha_1(X) - \alpha_0(X, 2)$.

(d) *Wenn $d_X(x) \neq 2$, dann $d_{\varrho X}(x) = d_X(x)$.*

(e) $Ch(\varrho X) = E(\varrho X)$.

(5.8) *Satz.* $\varrho^2 X = \varrho X$.

Beweis. $V(\varrho^2 X) = \{x \mid x \varepsilon V(\varrho X), d_{\varrho X}(x) \neq 2\} = \{x \mid x \varepsilon \{x' \mid x' \varepsilon V(X), d_X(x') \neq 2\}, d_{\varrho X}(x) \neq 2\} = \{x' \mid x' \varepsilon V(X), d_X(x') \neq 2, d_{\varrho X}(x') \neq 2\} = \{x \mid x \varepsilon V(X), d_X(x) \neq 2\} = V(\varrho X)$.

$E(\varrho^2 X) = Ch(\varrho X) = E(\varrho X) = Ch(X)$.

$[h_{\varrho^2 X}\langle[:x_1, \ldots, x_c:], 1\rangle, h_{\varrho^2 X}\langle[:x_1, \ldots, x_c:], 2\rangle] = [h_{\varrho X}\langle[:x_1, \ldots, x_c:], 1\rangle, h_{\varrho X}\langle[:x_1, \ldots, x_c:], 2\rangle] = [x_1, x_c]$.

(5.9) *Satz.* $\varrho\eta X \cong \varrho X$.

Beweis. $V(\varrho\eta X) = \{x \mid x \varepsilon V(\eta X), d_{\eta X}(x) \neq 2\} = \{x \mid x \varepsilon (V(X) \cup E(X)), d_{\eta X}(x) \neq 2\}$.

Nach (5.6.g und h) folgt daraus $V(\varrho\eta X) = \{x \mid x \varepsilon V(X), d_X(x) \neq 2\} = V(\varrho X)$.

Wenn $[:x_1, x_2, \ldots, x_c:] \varepsilon Ch(X)$, dann $[:x_1, e_1, x_2, e_2, \ldots, e_{c-1}, x_c:] \varepsilon \varepsilon Ch(\eta X)$, und umgekehrt. $[h_{\varrho X}\langle[:x_1, \ldots, x_c:], 1\rangle, h_{\varrho X}\langle[:x_1, \ldots, x_c:], 2\rangle] = [h_{\varrho\eta X}\langle[:x_1, e_1, \ldots, e_{c-1}, x_c:], 1\rangle, h_{\varrho\eta X}\langle[:x_1, e_1, \ldots, e_{c-1}, x_c:], 2\rangle] = [x_1, x_c]$, d. h., daß die durch $h_{\varrho X}$ und $h_{\varrho\eta X}$ definierten Abbildungen entsprechender Kanten aus $E(\varrho X)$ und $E(\varrho\eta X)$ die gleichen Punktepaare ergeben.

(5.10) *Definition.* Wir bilden aus einem Graphen X dadurch einen neuen Graphen X_1, daß wir irgendeine Kante halbieren. Dies wiederholen wir eine endliche Anzahl von Malen und erhalten so einen Graphen X_n. Die Tatsache, daß X_n auf die soeben beschriebene Weise aus X erhalten werden kann, wollen wir durch $X \to X_n$ beschreiben.

(5.11) *Definition.* Zwei Graphen X und Y heißen homöomorph, wenn es einen Graphen Z gibt, so daß $X \to Z$ und $Y \to Z$.

(5.12) *Satz.* (a) $X \to \eta X$.

(b) $\varrho X \to X$.

(c) *X und Y sind dann und nur dann homöomorph, wenn* $\varrho X \cong \varrho Y$.

6. Die Transformationen σ und τ

Wir haben gesehen, daß man durch die Transformation ϱ aus dem Bereich der speziellen Graphen gelangen kann (5.7.a). Durch zweimaliges Anwenden der Transformation η ist man sicher wieder bei einem speziellen Graphen (5.6.e und f). In diesem Abschnitt soll eine andere Möglichkeit gezeigt werden, zu den speziellen Graphen zurückzukehren.

(6.1) *Definition.* $V(\sigma X) = V(X)$.

$E^*(\sigma X) = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); \exists e \varepsilon E(X) \ni [h_X\langle e, 1\rangle, h_X\langle e, 2\rangle] = [x, y]\}$.

(6.2) *Definition.* $V(\tau X) = V(X)$,

$E(\tau X) = \{ e \mid e \varepsilon E(X); [h_X\langle e, 1\rangle, h_X\langle e, 2\rangle] = [x, y]; x \neq y\}$,

$h_{\tau X}\langle e, i\rangle = h_X\langle e, i\rangle$.

(6.3) *Anmerkung.* σ ersetzt mehrfache Kanten durch einfache, τ läßt Schlingen fort.

(6.4) *Satz.* $\sigma^2 X = \sigma X$.

Beweis.

1. $V(\sigma^2 X) = V(\sigma X) = V(X)$.

2. $E^*(\sigma^2 X) = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(\sigma X); \exists e \varepsilon E^*(\sigma X) \ni [h_{\sigma X}\langle e, 1\rangle, h_{\sigma X}\langle e, 2\rangle] = [x, y]\} = \{[\{x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); \exists e \varepsilon \{[x', y'] \mid x', y' \varepsilon V(X); \exists e' \varepsilon E(X) \ni [h_X\langle e', 1\rangle, h_X\langle e', 2\rangle] = [x', y']\}, e = [x, y]\} = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); [x, y] \varepsilon \{[x', y'] \mid x', y' \varepsilon V(X); \exists e' \varepsilon E(X) \ni [h_X\langle e', 1\rangle, h_X\langle e', 2\rangle] = [x', y']\}\} = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); \exists e' \varepsilon E(X) \ni [h_X\langle e', 1\rangle, h_X\langle e', 2\rangle] = [x, y]\} = E^*(\sigma X)$.

3. $V(\sigma^2 X) = V(\sigma X)$, $E^*(\sigma^2 X) = E^*(\sigma X)$, $\sigma^2 X = \sigma X$.

(6.5) *Satz.* $\tau^2 X = \tau X$.

Beweis.

1. $V(\tau^2 X) = V(\tau X) = V(X)$.

2. $E(\tau^2 X) = \{e \mid e \varepsilon E(\tau X); [h_{\tau X}\langle e, 1\rangle, h_{\tau X}\langle e, 2\rangle] = [x, y]; x \neq y\} = \{e \mid e \varepsilon \{e' \mid e' \varepsilon E(X); [h_X\langle e', 1\rangle, h_X\langle e', 2\rangle] = [x', y']; x' \neq y'\}; [h_{\tau X}\langle e, 1\rangle, h_{\tau X}\langle e, 2\rangle] = [x, y]; x \neq y\} = \{e' \mid e' \varepsilon E(X); [h_X\langle e', 1\rangle, h_X\langle e', 2\rangle] = [x', y']; x' \neq y'; [h_{\tau X}\langle e', 1\rangle, h_{\tau X}\langle e', 2\rangle] = [x, y]; x \neq y\}$.

$e' \varepsilon E(X); [h_X\langle e', 1\rangle, h_X\langle e', 2\rangle] = [x', y']; x' \neq y'$ bedeutet $e' \varepsilon E(\tau X)$,

also $h_{\tau X}\langle e', 1\rangle = h_X\langle e', 1\rangle$, $h_{\tau X}\langle e', 2\rangle = h_X\langle e', 2\rangle$, $[x, y] = [x', y']$. $E(\tau^2 X) = \{e' \mid e' \varepsilon E(X); [h_X\langle e', 1\rangle, h_X\langle e', 2\rangle] = [x', y']; x' \neq y'\} = E(\tau X)$.

3. $h_{\tau^2 X}\langle e, i\rangle = h_{\tau X}\langle e, i\rangle = h_X\langle e, i\rangle$.

4. $V(\tau^2 X) = V(\tau X)$, $E(\tau^2 X) = E(\tau X)$, $h_{\tau^2 X}\langle e, i\rangle = h_{\tau X}\langle e, i\rangle$, also $\tau^2 X = \tau X$.

(6.6) *Satz.* $\sigma\tau X = \tau\sigma X$, *und zwar* $V(\sigma\tau X) = V(X)$, $E^*(\sigma\tau X) = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); \exists\, e \varepsilon E(X) \ni [h_X\langle e, 1\rangle, h_X\langle e, 2\rangle] = [x, y]; x \neq y\}$. *Das ist offenbar ein spezieller Graph.* (6.6)

Beweis. 1. $V(\sigma\tau X) = V(\tau X) = V(X)$, $V(\tau\sigma X) = V(\sigma X) = V(X)$, also $V(\sigma\tau X) = V(\tau\sigma X) = V(X)$.

2. $E(\sigma\tau X) = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(\tau X); \exists\, e \varepsilon E(\tau X) \ni [h_{\tau X}\langle e, 1\rangle, h_{\tau X}\langle e, 2\rangle] = [x, y]\} = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); \exists\, e \varepsilon \{e' \mid e' \varepsilon E(X); [h_X\langle e', 1\rangle, h_X\langle e', 2\rangle] = [x', y']; x' \neq y'\} \ni [h_{\tau X}\langle e, 1\rangle, h_{\tau X}\langle e, 2\rangle] = [x, y]\} = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); \exists\, e' \varepsilon E(X) \ni [h_X\langle e', 1\rangle, h_X\langle e', 2\rangle] = [x', y']; x' \neq y'; [h_{\tau X}\langle e', 1\rangle, h_{\tau X}\langle e, 2\rangle] = [x, y]\}$.

$e' \varepsilon E(X); [h_X\langle e', 1\rangle, h_X\langle e', 2\rangle] = [x', y']; x' \neq y'$ bedeutet $e' \varepsilon E(\tau X)$, also $h_{\tau X}\langle e', i\rangle = h_X\langle e', i\rangle$, $[x, y] = [x', y']$.

$E(\sigma\tau X) = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); \exists\, e' \varepsilon E(X) \ni [h_X\langle e', 1\rangle, h_X\langle e', 2\rangle] = [x, y], x \neq y\}$.

$E(\tau\sigma X) = \{e \mid e \varepsilon E(\sigma X); [h_{\sigma X}\langle e, 1\rangle, h_{\sigma X}\langle e, 2\rangle] = [x, y]; x \neq y\} = \{e \mid e \varepsilon \{[x', y'] \mid x', y' \varepsilon V(X); \exists\, e' \varepsilon E(X) \ni [h_X\langle e', 1\rangle, h_X\langle e', 2\rangle] = [x', y']\}; [h_{\sigma X}\langle e, 1\rangle, h_{\sigma X}\langle e, 2\rangle] = [x, y]; x \neq y\} = \{[x', y'] \mid x', y' \varepsilon V(X); \exists\, e' \varepsilon E(X) \ni [h_X\langle e', 1\rangle, h_X\langle e', 2\rangle] = [x', y']; [h_{\sigma X}\langle [x', y'], 1\rangle, h_{\sigma X}\langle [x', y'], 2\rangle] = [x, y]; x \neq y\}$.

Wegen $E^*(\sigma X)$ gilt $[h_{\sigma X}\langle [x', y'], 1\rangle, h_{\sigma X}\langle [x', y'], 2\rangle] = [x', y']$, also $[x, y] = [x', y']$.

$E(\tau\sigma X) = \{[x', y'] \mid x', y' \varepsilon V(X); \exists\, e' \varepsilon E(X) \ni [h_X\langle e', 1\rangle, h_X\langle e', 2\rangle] = [x', y']; x' \neq y'\}$.

$E(\sigma\tau X) = E(\tau\sigma X) = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); \exists\, e \varepsilon E(X) \ni [h_X\langle e, 1\rangle, h_X\langle e, 2\rangle] = [x, y]; x \neq y\}$.

3. $[x, y] \varepsilon E(\sigma\tau X) = E(\tau\sigma X); [x, y] \varepsilon V(X) = V(\tau X)$.

$[h_{\sigma\tau X}\langle [x, y], 1\rangle, h_{\sigma\tau X}\langle [x, y], 2\rangle] = [x, y]$,

$[h_{\tau\sigma X}\langle [x, y], 1\rangle, h_{\tau\sigma X}\langle [x, y], 2\rangle] = [h_{\sigma X}\langle [x, y], 1\rangle, h_{\sigma X}\langle [x, y], 2\rangle] = [x, y]$.

4. Aus $V(\sigma\tau X) = V(\tau\sigma X) = V(X)$, $E(\sigma\tau X) = E(\tau\sigma X) = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); \exists\, e \varepsilon E(X) \ni [h_X\langle e, 1\rangle, h_X\langle e, 2\rangle] = [x, y]; x \neq y\}$, $[h_{\sigma\tau X}\langle [x, y], 1\rangle, h_{\sigma\tau X}\langle [x, y], 2\rangle] = [h_{\tau\sigma X}\langle [x, y], 1\rangle, h_{\tau\sigma X}\langle [x, y], 2\rangle] = [x, y]$ folgt $\sigma\tau X = \tau\sigma X$, $V(\sigma\tau X) = V(X)$, $E^*(\sigma\tau X) = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); \exists\, e \varepsilon E(X) \ni [h_X\langle e, 1\rangle, h_X\langle e, 2\rangle] = [x, y]; x \neq y\}$.

7. Die Transformation ι

Die Definitionen (7.1) und (7.2) sind durch *T. Morita* [11] angeregt, aber den dort verwendeten nicht genau äquivalent.

(7.1) *Definition.* $V(\iota X) = \{x \mid x \varepsilon V(X), d_X(x) \neq 2\}$.

$$E^*(\iota X) = \{[x, y] \mid \exists\, [: x, \ldots, y:] \varepsilon Ch(X), x \neq y\}.$$

(7.2) *Definition.* (a) $\lim_{k\to\infty} \iota^k X = \lambda X$,

(b) $\min\{k \mid \iota^k X = \lambda X\} = m(X)$,

(c) $\alpha_0(\lambda X) = w(X)$.

(7.3) *Satz.* $\iota X = \sigma\tau\varrho X = \tau\sigma\varrho X$.

Beweis.

1. $V(\sigma\tau\varrho X) = V(\varrho X) = \{x \mid x \varepsilon V(X), d_X(x) \neq 2\} = V(\iota X)$.

2. $E^*(\sigma\tau\varrho X) = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(\varrho X);\ \exists\, e \varepsilon E(\varrho X) \in [h_{\varrho X}\langle e, 1\rangle, h_{\varrho X}\langle e, 2\rangle] = [x, y]; x \neq y\} = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon \{x' \mid x' \varepsilon V(X); d_X(x') \neq 2\}, e \varepsilon Ch(X), [h_{\varrho X}\langle e, 1\rangle, h_{\varrho X}\langle e, 2\rangle] = [x, y]; x \neq y\} = \{[x, y] \mid x, y \varepsilon V(X); d_X(x) \neq 2; d_X(y) \neq 2; [: x, \ldots, y:] \varepsilon Ch(X); x \neq y\} = \{[x, y] \mid [: x, \ldots, y:] \varepsilon Ch(X); x \neq y\} = E^*(\iota X)$.

3. Aus $V(\sigma\tau\varrho X) = V(\iota X)$, $E^*(\sigma\tau\varrho X) = E^*(\iota X)$ und (6.6) folgt $\sigma\tau\varrho X = \tau\sigma\varrho X = \iota X$.

(7.4) *Satz. Ist n eine beliebige natürliche Zahl, X ein spezieller Graph mit $d_X(x) \geqq 2$ für alle $x \varepsilon V(X)$, so gibt es einen Graphen Y mit den gleichen Eigenschaften, so daß $G_{VE}(Y) \cong G_{VE}(X)$ und $\iota^n Y = X$.*

Beweis.

1. Wir definieren zunächst einen Graphen ${}^1X^k$, k eine beliebige natürliche Zahl.

$V({}^1X^k) = V(X) \cup \{\langle v, e, i\rangle \mid v \varepsilon V(X); e \varepsilon E^*(X); ||: v, X, e: ||; i = 1, \ldots, k\}$,

$E^*({}^1X^k) = E^*(X) \cup \{[\langle x, e, i\rangle, \langle y, e, i\rangle] \mid e = [x, y] \varepsilon E^*(X);\ i = 1, \ldots, k\} \cup \cup \{[v, \langle v, e, 1\rangle]\} \cup \{[\langle v, e, j\rangle, \langle v, e, j+1\rangle] \mid v \varepsilon V(X); j = 1, \ldots, k-1\}$.

Wenn $v \varepsilon V(X)$, dann $d_{\iota X^k}(v) = 2\, d_X(v)$, denn zu den Kanten aus $E^*(X)$ kommen noch die Kanten aus $\{[v, \langle v, e, 1\rangle]\}$ dazu. $d_X(v) \geqq 2$, $d_{\iota X^k}(v) \geqq 4$.

Wenn $j = 1, \ldots, k-1$, dann $d_{\iota X^k}\langle v, e, j\rangle = 3$, denn so ein Punkt kommt einmal in $\{[\langle x, e, i\rangle, \langle y, e, i\rangle] \mid e = [x, y] \varepsilon E^*(X); i = 1, \ldots, k\}$ vor, und außerdem, wenn (i) $j \neq 1$ ist, zweimal in $\{[\langle v, e, j\rangle, \langle v, e, j+1\rangle] \mid v \varepsilon V(X); j = 1, \ldots, k-1\}$, wenn dagegen (ii) $j = 1$ ist, einmal in $\{[\langle v, e, j\rangle, \langle v, e, j+1\rangle] \mid v \varepsilon V(X); j = 1, \ldots, k-1\}$ und einmal in $\{[v, \langle v, e, 1\rangle]\}$.

Da $\langle v, e, k\rangle$ einmal in $\{[\langle x, e, i\rangle, \langle y, e, i\rangle] \mid e = [x, y] \varepsilon E^*(X); i = 1, \ldots$ $\ldots, k\}$ und einmal in $\{[\langle v, e, j\rangle, \langle v, e, j+1\rangle] \mid v \varepsilon V(X); j = 1, \ldots, k-1\}$ vorkommt, sieht man, daß $d_{{}^1X^k}\langle v, e, k\rangle = 2$ ist.

2. $V({}^1X^1) = V(X) \cup \{\langle v, e, 1\rangle \mid v \varepsilon V(X),\ e \varepsilon E^*(X),\ \|: v, X, e: \|\}$, $E^*({}^1X^1) = E^*(X) \cup \{[\langle x, e, 1\rangle, \langle y, e, 1\rangle] \mid e = [x, y] \varepsilon E^*(X)\} \cup \{[v, \langle v, e, 1\rangle]\}$. Da die $\langle v, e, 1\rangle$ die einzigen Knotenpunkte von ${}^1X^1$ sind, deren Grad $= 2$ ist, ergibt sich $(Ch - E^*)({}^1X^1) = \{[x, \langle x, e, 1\rangle, \langle y, e, 1\rangle, y] \mid e = [x, y] \varepsilon E^*(X)\}$. Wegen $[x, y] \varepsilon E^*(X)$ ergibt sich $\iota^1X^1 = X$.

3. Ist $k > 1$, so sind $\langle v, e, k\rangle$ die einzigen Knotenpunkte zweiten Grades von ${}^1X^k$ und $(Ch - E^*)({}^1X^k) = \{[\langle x, e, k-1\rangle, \langle x, e, k\rangle, \langle y, e, k\rangle, \langle y, e, k-1\rangle] \mid e = [x, y] \varepsilon E^*(X)$. Außerdem ist dann wegen $[x, y] \varepsilon E^*(X)$ auch $[\langle x, e, k-1\rangle, \langle y, e, k-1\rangle] \varepsilon E^*({}^1X^k)$; wir erhalten $\iota^1X^k = {}^1X^{k-1}$.

4. Zusammenfassend erhalten wir $\iota^n {}^1X^n = X$, also ist das gesuchte $Y = {}^1X^n$.

5. Bleibt noch zu zeigen, daß $G_{VE}(X) \cong G_{VE}(Y)$ ist. Sei $P \varepsilon G_{VE}(X)$, dann definieren wir P' durch $P'x = Px$, $P'e = Pe$, $P'\langle x, e, j\rangle = \langle Px, Pe, j\rangle$. Offenbar $P' \varepsilon G_{VE}(Y)$, und verschiedene P ergeben auch verschiedene P'. Sei $\mathfrak{P} = \{P'\}$, dann gilt $G_{VE}(X) \cong \mathfrak{P} \subseteq G_{VE}(Y)$.

Ein Automorphismus von $Y = {}^1X^n$ kann die Punkte $\langle x, e, n\rangle$ nur untereinander permutieren, da diese die einzigen zweiten Grades sind. Die Entfernung von $\langle x, e, n\rangle$ nach x beträgt n Kanten, die Entfernung von $\langle x, e, n\rangle$ nach jedem anderen Punkte mindestens 4. Grades beträgt mehr als n Kanten. Also sind jedem x die $\langle x, e, n\rangle$ topologisch zugeordnet. Die Punkte mindestens 4. Grades entsprechen den Punkten von X, daher induziert jeder Automorphismus von Y einen Automorphismus von X und jedem Automorphismus von X kann nur ein Automorphismus von Y entsprechen. $G_{VE}(X) \cong \mathfrak{P} = G_{VE}(Y)$.

(7.5) *Satz. Ist X ein spezieller Graph und n eine beliebige natürliche Zahl, so gibt es stets einen speziellen Graphen Y, so daß $G_{VE}(Y) \cong G_{VE}(X)$ und $\iota^n Y = X$.*

Beweis. $V({}^2X^k) = V(X) \cup E^*(X) \cup \{\langle v, e, i, l\rangle \mid v \varepsilon V(X); e \varepsilon E^*(X);$ $\|: v, X, e: \|; i = 1, \ldots, k; l = 1, 2\}$,
$E^*({}^2X^k) = E^*(X) \cup \{[\langle x, e, i, l\rangle, \langle y, e, i, l\rangle] \mid e = [x, y] \varepsilon E^*(X); i = 1, \ldots, k$ für $l = 1; i = 1, \ldots, k-1$ für $l = 2\} \cup \{[\langle v, e, k, 2\rangle, e] \mid \|: v, X, e: \|\} \cup$ $\cup \{[v, \langle v, e, 1, l\rangle]\} \cup \{[\langle v, e, j, l\rangle, \langle v, e, j+1, l\rangle] \mid j = 1, \ldots, k-1\}$. Mit diesem Graphen ${}^2X^k$ wird analog verfahren, wie im Beweis zu (7.4) mit ${}^1X^k$.

(7.6) *Folgerung.* Unter den Bedingungen der Sätze (7.4) und (7.5) ist $\lambda Y = \lambda X$, $w(Y) = w(X)$, $m(Y) = m(X) + n$.

(7.7) *Satz. Es seien zwei ganze Zahlen $m \geqq 0$, $\chi \geqq 2$ und eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ vorgegeben; dann gibt es stets eine unendliche Menge endlicher und eine nicht abzählbare Menge unendlicher Graphen X mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$, $m(X) = m$, $\chi(X) = \chi$. Sie haben keine Fixpunkte und keine Fixkanten, falls $\mathfrak{H} \ncong \mathfrak{E}$.*

Beweis. Laut [6] gibt es eine unendliche Menge endlicher und eine nicht abzählbare Menge unendlicher regulärer Graphen X mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$, $\chi(X) = \chi$, $n(X) \geqq 3$. Für $\mathfrak{H} \ncong \mathfrak{E}$ sind sie frei von Fixpunkten und Fixkanten. Unterwirft man diese Graphen der Konstruktion von Satz (7.4), so kommt man zum gewünschten Resultat.

(7.8) *Definition.* Seien $i \geqq 0$, $j \geqq 2$ ganze Zahlen. Dann sei $V(M_i^j) = \{\langle \mu, \nu\rangle \mid \mu = -2, -1, 0, \ldots, i; \nu = 1, \ldots, j-1$ für $\mu = -2; \nu = 1, 2$ für $\mu > 0, \mu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3); \nu = 1$ für $\mu \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)\}$,
$E^*(M_i^j) = \{[\langle \mu - 1, \nu'\rangle, \langle \mu, \nu''\rangle]\}$.

(7.9) *Definition.* Sei $i \geqq 0$ eine ganze Zahl, dann sei
$V(D_i) = \{\langle \varkappa, \mu, \nu\rangle \mid \varkappa = 1, 2; \mu = 0, \ldots, i; \nu = 1, 2$ für $\mu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3); \nu = 1$ für $\mu \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)\}$;
$E^*(D_i) = [\langle 1, 0, 1\rangle, \langle 2, 0, 1\rangle] \cup \{[\langle \varkappa, \mu - 1, \nu'\rangle, \langle \varkappa, \mu, \nu''\rangle]\}$.

(7.10) *Definition.*

(a) Sei $j \geqq 3$ eine ganze Zahl; dann sei $V(R_0^j) = 1$, $E^*(R_0^j) = \varnothing$.

(b) Seien $j \geqq 3$, $i \geqq 1$ ganze Zahlen; dann sei
$V(R_i^j) = \{\langle \varkappa, \mu, \nu\rangle \mid \varkappa = 1, \ldots, j; \mu = 2, \ldots, i+1; \nu = 1, 2$ für $\mu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$; $\nu = 1$ für $\mu \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)\}$,
$E^*(R_i^j) \{[\langle \varkappa, 2, 1\rangle, \langle \varkappa + 1, 2, 1\rangle] \mid \varkappa = 1, \ldots, j; j+1 = 1\} \cup \{[\langle \varkappa, \mu - 1, \nu'\rangle, \langle \varkappa, \mu, \nu''\rangle]\}$.

(7.11) *Satz.* $V(\vartheta M_i^j) = \{\langle \mu, \nu\rangle \mid \mu = -1, 0, \ldots, i; \nu = 1, \ldots, j-1$ für $\mu = -1$; $\nu = 1$ für $\mu \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$; $\nu = 1, 2$ für $\mu > 0$, $\mu \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)\}$,

$$\begin{aligned} E^*(\vartheta M_i^j) = {} & \{[\langle -1, \nu'\rangle, \langle -1, \nu''\rangle] \mid \nu', \nu'' = 1, \ldots, j-1; \nu' \neq \nu''\} \cup \\ & \cup \{[\langle \mu, 1\rangle, \langle \mu, 2\rangle] \mid \mu \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3), 0 < \mu \leqq i\} \cup \\ & \cup \{[\langle -1, \nu\rangle, \langle 0, 1\rangle] \mid \nu = 1, \ldots, j-1\} \cup \\ & \cup \{[\langle \mu - 1, 1\rangle, \langle \mu, \nu\rangle] \mid \mu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3); 0 < \mu \leqq i; \nu = 1, 2\} \cup \\ & \cup \{[\langle \mu - 1, \nu\rangle, \langle \mu, \nu\rangle] \mid \mu \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3); 0 < \mu \leqq i; \nu = 1, 2\} \cup \\ & \cup \{[\langle \mu - 1, \nu\rangle, \langle \mu, 1\rangle] \mid \mu \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3); 0 < \mu \leqq i; \nu = 1, 2\}. \end{aligned}$$

Beweis.

1. Es ist $V(\vartheta X) = E^*(X)$, $E^*(\vartheta X) = \{[[p, q], [r, s]] \mid [p, q] \varepsilon V(\vartheta X), [r, s] \varepsilon V(\vartheta X), [p, q] \neq [r, s], (p \cup q) \cap (r \cup s) \neq \varnothing\}$, also
$V(\vartheta M_i^j) = \{[\langle \mu - 1, \nu' \rangle, \langle \mu, \nu'' \rangle] \mid \mu = -1, 0, \ldots, i; \nu' = 1, \ldots, j -$ für $\mu = -1$;
$\nu' = 1, 2$ für $\mu > 1, \mu \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$; $\nu' = 1$ für $\mu \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$; $\nu'' = 1, 2$ für $\mu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$; $\nu'' = 1$ für $\mu \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)\}$,
$E^*(\vartheta M_i^j) = \{[[p, q], [r, s]] \mid [p, q], [r, s] \varepsilon \{[\langle \mu - 1, \nu' \rangle, \langle \mu, \nu'' \rangle] \mid \mu = -1, 0, \ldots, i; \nu' = 1, \ldots, j - 1$ für $\mu = -1$; $\nu' = 1, 2$ für $\mu > 1, \mu \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$; $\nu' = 1$ für $\mu \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$; $\nu'' = 1, 2$ für $\mu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$; $\nu'' = 1$ für $\mu \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)\}$, $[p, q] \neq [r, s]$, $(p \cup q) \cap (r \cup s) \neq \varnothing\} =$
$= \{[[\langle \mu - 1, \nu' \rangle, \langle \mu, \nu'' \rangle], [\langle m - 1, n' \rangle, \langle m, n'' \rangle]] \mid \mu, m = -1, 0, \ldots, i;$
$\nu' = 1, \ldots, j - 1$ für $\mu = -1$; $\nu' = 1, 2$ für $\mu > 1, \mu \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$; $\nu' = 1$ für $\mu \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$;
$n' = 1, \ldots, j - 1$ für $m = -1$; $n' = 1, 2$ für $m > 1, m \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$; $n' = 1$ für $m \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$;
$\nu'' = 1, 2$ für $\mu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$; $\nu'' = 1$ für $\mu \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$;
$n'' = 1, 2$ für $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$; $n'' = 1$ für $m \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$;
$[\langle \mu - 1, \nu' \rangle, \langle \mu, \nu'' \rangle] \neq [\langle m - 1, n' \rangle, \langle m, n'' \rangle]$;
$(\langle \mu - 1, \nu' \rangle \cup \langle \mu, \nu'' \rangle) \cap (\langle m - 1, n' \rangle \cup \langle m, n'' \rangle) \neq \varnothing\}$.
Damit $(\langle \mu - 1, \nu' \rangle \cup \langle \mu, \nu'' \rangle) \cap (\langle m - 1, n' \rangle \cup \langle m, n'' \rangle) \neq \varnothing$, muß notwendig mindestens eine der folgenden Gleichheiten bestehen:
$\langle \mu - 1, \nu' \rangle = \langle m - 1, n' \rangle$; $\langle \mu - 1, \nu' \rangle = \langle m, n'' \rangle$; $\langle \mu, \nu'' \rangle = \langle m - 1, n' \rangle$;
$\langle \mu, \nu'' \rangle = \langle m, n'' \rangle$. Es muß also $\mu = m$ oder $\mu = m \pm 1$ sein. Wir wollen die Menge aller Kanten mit $\mu = m$ mit E_1 bezeichnen, die aller mit $\mu = m \pm 1$ mit E_2: $E^*(\vartheta M_i^j) = E_1 \cup E_2$.

2. $E_1 = \{[[\langle \mu - 1, \nu' \rangle, \langle \mu, \nu'' \rangle], [\langle \mu - 1, n' \rangle, \langle \mu, n'' \rangle]] \mid \mu = -1, 0, \ldots, i;$
$\nu', n' = 1, \ldots, j - 1$ für $\mu = -1$; $\nu', n' = 1, 2$ für $\mu > 1, \mu \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$;
$\nu', n' = 1$ für $\mu \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$; $\nu'', n'' = 1, 2$ für $\mu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$; $\nu'', n'' = 1$ für $\mu \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$; $[\langle \mu - 1, \nu' \rangle, \langle \mu, \nu'' \rangle] \neq [\langle \mu - 1, n' \rangle, \langle \mu, n'' \rangle]$;
$(\langle \mu - 1, \nu' \rangle \cup \langle \mu, \nu'' \rangle) \cap (\langle \mu - 1, n' \rangle \cup \langle \mu, n'' \rangle) \neq \varnothing\}$.
Aus $[\langle \mu - 1, \nu' \rangle, \langle \mu, \nu'' \rangle] \neq [\langle \mu - 1, n' \rangle, \langle \mu, n'' \rangle]$ folgt $\nu' \neq n'$ oder $\nu'' \neq n''$ oder beides; aus $(\langle \mu - 1, \nu' \rangle \cup \langle \mu, \nu'' \rangle) \cap (\langle \mu - 1, n \rangle \cup \langle \mu, n'' \rangle) \neq \varnothing$ folgt $\nu' = n'$ oder $\nu'' = n''$ oder beides; zusammen haben wir: entweder $\nu' \neq n'$, $\nu'' = n''$; oder $\nu' = n'$, $\nu'' \neq n''$; und umgekehrt folgen daraus wieder die beiden ursprünglichen Bedingungen. Also
$E_1 = \{[[\langle \mu - 1, \nu' \rangle, \langle \mu, \nu'' \rangle], [\langle \mu - 1, n' \rangle, \langle \mu, n'' \rangle]] \mid \mu = -1, 0, \ldots, i;$
$\nu', n' = 1, \ldots, j - 1$ für $\mu = -1$; $\nu', n' = 1, 2$ für $\mu > 1, \mu \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$;
$\nu', n' = 1$ für $\mu \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$; $\nu'', n'' = 1, 2$ für $\mu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$; $\nu'', n'' = 1$ für $\mu \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$; entweder $\nu' \neq n', \nu'' = n''$; oder $\nu' = n', \nu'' \neq n''\}$.

Für $\mu = -1$ folgt $\nu'' = n'' = 1$; $\nu', n' = 1, \ldots, j-1$; $\nu' \neq n'$; d. h. $(j-1_2)$ Kanten.

Für $\mu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ folgt $\nu' = n' = 1; \nu'' = 1, n'' = 2$ oder $\nu'' = 2, n'' = 1$.

Für $\mu > 0, \mu \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ folgt $\nu'' = n'' = 1; \nu' = 1, n' = 2$ oder $\nu' = 2, n' = 1$.

Für $\mu \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$ folgt $\nu'' = n'' = 1$ und $\nu' = n' = 1$; das widerspricht der letzten Bedingung, also gibt es hier keine Kanten.

$E_1 = \{[[\langle -2, \nu' \rangle, \langle -1, 1 \rangle], [\langle -2, n' \rangle, \langle -1, 1 \rangle]] \mid \nu', n' = 1, \ldots, j-1; \nu' \neq n'\} \cup$

$\cup \{[[\langle \mu-1, 1 \rangle, \langle \mu, 1 \rangle], [\langle \mu-1, 1 \rangle, \langle \mu, 2 \rangle]] \mid \mu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3), 0 < \mu \leqq i\} \cup$

$\cup \{[[\langle \mu-1, 1 \rangle, \langle \mu, 1 \rangle], [\langle \mu-1, 2 \rangle, \langle \mu, 1 \rangle]] \mid \mu \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3), 0 < \mu \leqq i\}$.

3. Bei der Berechnung von E_2 können wir uns o. B. d. A. auf $\mu = m-1$ beschränken; widrigenfalls vertauschen μ und m, ν' und n', ν'' und n'' ihre Rollen. Wir erhalten $E_2 =$

$= \{[[\langle m-2, \nu' \rangle, \langle m-1, \nu'' \rangle], [\langle m-1, n' \rangle, \langle m, n'' \rangle]] \mid m = 0, \ldots, i;$

$\nu' = 1, \ldots, j-1$ für $m = 0; \nu' = 1, 2$ für $m > 2, m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3); \nu' = 1$ für $m \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$; $n' = 1, \ldots, j-1$ für $m = -1$ (wid. $m = 0, \ldots, i$);

$n' = 1, 2$ für $m > 1$ (automatisch erfüllt), $m \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$; $n' = 1$ für $m \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$;

$\nu'' = 1, 2$ für $m > 1$ (automatisch erfüllt), $m \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$;

$\nu'' = 1$ für $m \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$;

$n'' = 1, 2$ für $m > 0$ (automatisch erfüllt), $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$;

$n'' = 1$ für $m \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$;

$[\langle m-2, \nu' \rangle, \langle m-1, \nu'' \rangle] \neq [\langle m-1, n' \rangle, \langle m, n'' \rangle]$ (automatisch erfüllt);

$(\langle m-2, \nu' \rangle \cup \langle m-1, \nu'' \rangle) \cap (\langle m-1, n' \rangle \cup \langle m, n'' \rangle) \neq \varnothing\}$.

Aus $(\langle m-2, \nu' \rangle \cup \langle m-1, \nu'' \rangle) \cap (\langle m-1, n' \rangle \cup \langle m, n'' \rangle) \neq \varnothing$ folgt $\langle m-1, \nu'' \rangle = \langle m-1, n' \rangle, \nu'' = n$.

$E_2 = \{[[\langle m-2, \nu' \rangle, \langle m-1, n' \rangle], [\langle m-1, n' \rangle, \langle m, n'' \rangle]] \mid m = 0, \ldots, i;$

$\nu' = 1, \ldots, j-1$ für $m = 0; \nu' = 1, 2$ für $m > 2, m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3); \nu' = 1$ für $m \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$; $n' = 1, 2$ für $m \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$; $n' = 1$ für $m \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$;

$n'' = 1, 2$ für $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$; $n'' = 1$ für $m \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)\}$.

Für $m = 0$ ist $\nu' = 1, \ldots, j-1; n' = 1; n'' = 1$.

Für $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ ist $\nu' = 1; n' = 1; n'' = 1, 2$.

Für $m \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ ist $\nu' = 1; n' = 1, 2; n'' = 1$.

Für $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3), m > 0$ ist $\nu' = 1, 2; n' = 1; n'' = 1$.

$E_2 = \{[[\langle -2, \nu' \rangle, \langle -1, 1 \rangle], [\langle -1, 1 \rangle, \langle 0, 1 \rangle]] \mid \nu' = 1, \ldots, j-1\} \cup$

$\cup \{[[\langle m-2, 1 \rangle, \langle m-1, 1 \rangle], [\langle m-1, 1 \rangle, \langle m, n'' \rangle]] \mid m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3);$

$0 < m \leqq i; n'' = 1, 2\} \cup$

$\cup \{[[\langle m-2, 1 \rangle, \langle m-1, n' \rangle], [\langle m-1, n' \rangle, \langle m, 1 \rangle]] \mid m \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3);$

$0 < m \leqq i;\ n' = 1, 2\} \cup$
$\cup \{[\langle m-2, \nu'\rangle, \langle m-1, 1\rangle], [\langle m-1, 1\rangle, \langle m, 1\rangle]] \mid m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3);$
$0 < m \leqq i; \nu' = 1, 2\}.$

4. Wir führen nun folgende Vereinfachung für die Notation der Knotenpunkte von ϑM_i^j ein:

$[\langle -2, n\rangle, \langle -1, 1\rangle] \leftrightarrow \langle -1, n\rangle, n = 1, \ldots, j-1,$
$[\langle \mu-1, 1\rangle, \langle \mu, 1\rangle] \leftrightarrow \langle \mu, 1\rangle$ für $\mu \geqq 0, \mu \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3),$
$[\langle \mu-1, 1\rangle, \langle \mu, n\rangle] \leftrightarrow \langle \mu, n\rangle, n = 1, 2$ für $\mu > 0, \mu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3),$
$[\langle \mu-1, n\rangle, \langle \mu, 1\rangle] \leftrightarrow \langle \mu, n\rangle, n = 1, 2$ für $\mu > 0, \mu \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3).$
Das ergibt

$V(\vartheta M_i^j) = \{\langle \mu, n\rangle \mid \mu = -1, 0, \ldots, i; n = 1, \ldots, j-1$ für $\mu = -1; n = 1$ für $\mu \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3); n = 1, 2$ für $\mu > 0, \mu \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)\},$
$E_1 = \{[\langle -1, n\rangle, \langle -1, \nu\rangle] \mid \nu, n = 1, \ldots, j-1; \nu \neq n\} \cup \{[\langle \mu, 1\rangle, \langle \mu, 2\rangle] \mid \mu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3); 0 < \mu \leqq i\} \cup \{[\langle \mu, 1\rangle, \langle \mu, 2\rangle] \mid \mu \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3); 0 < \mu \leqq i\} =$
$= \{[\langle -1, n\rangle, \langle -1, \nu\rangle] \mid \nu, n = 1, \ldots, j-1; \nu \neq n\} \cup$
$\cup \{[\langle \mu, 1\rangle, \langle \mu, 2\rangle] \mid \mu \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3); 0 < \mu \leqq i\},$
$E_2 = \{[\langle -1, \nu'\rangle, \langle 0, 1\rangle] \mid \nu' = 1, \ldots, j-1\} \cup \{[\langle m-1, 1\rangle, \langle m, n''\rangle] \mid m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3); 0 < m \leqq i; n'' = 1, 2\} \cup \{[\langle m-1, n'\rangle, \langle m, n'\rangle] \mid m \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3); 0 < m \leqq i; n' = 1, 2\} \cup \{[\langle m-1, \nu'\rangle, \langle m, 1\rangle] \mid m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3); 0 < m \leqq i; \nu' = 1, 2\}.$
Daraus ergeben sich durch einfache Umbenennungen die behaupteten Formeln.

(7.12) *Satz.* $V(\vartheta D_i) = \{\langle \varkappa, \mu, \nu\rangle \mid \varkappa = 1, 2; \mu = 0, \ldots, i; \nu = 1$ für $\mu \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3); \nu = 1, 2$ für $\mu \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3); \langle 1, 0, 1\rangle = \langle 2, 0, 1\rangle\},$
$E^*(\vartheta D_i) = \{[\langle \varkappa, \mu, 1\rangle, \langle \varkappa, \mu, 2\rangle] \mid \varkappa = 1, 2; \mu \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3); 0 < \mu \leqq i\} \cup$
$\cup \{[\langle \varkappa, \mu-1, 1\rangle, \langle \varkappa, \mu, \nu\rangle] \mid \varkappa = 1, 2; \mu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3); 0 < \mu \leqq i; \nu = 1, 2\} \cup$
$\cup \{[\langle \varkappa, \mu-1, \nu\rangle, \langle \varkappa, \mu, \nu\rangle] \mid \varkappa = 1, 2; \mu \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3); 0 < \mu \leqq i; \nu = 1, 2\} \cup$
$\cup \{[\langle \varkappa, \mu-1, \nu\rangle, \langle \varkappa, \mu, 1\rangle] \mid \varkappa = 1, 2; \mu \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3); 0 < \mu \leqq i; \nu = 1, 2\}.$
Beweis. Analog dem zu Satz (7.11).

(7.13) *Satz.*

(a) $V(\vartheta R_i^j) = \{\langle \varkappa, \mu, \nu\rangle \mid \varkappa = 1, \ldots, j; \mu = 2, \ldots, i+1; \nu = 1$ für $\mu = 2;$ $\nu = 1$ für $2 < \mu \leqq i+1, \mu \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3); \nu = 1, 2$ für $2 < \mu \leqq i+1, \mu \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)\},$
$E^*(\vartheta R_i^j) = \{[\langle \varkappa, 2, 1\rangle, \langle \varkappa + 1, 2, 1\rangle] \cup [\langle \varkappa, 2, 1\rangle, \langle \varkappa, 3, 1\rangle] \cup [\langle \varkappa, 3, 1\rangle, \langle \varkappa + 1, 2, 1\rangle] \mid \varkappa = 1, \ldots, j; \varkappa + 1 = j + 1 \Rightarrow \varkappa + 1 = 1\} \cup$
$\cup \{[\langle \varkappa, \mu, 1\rangle, \langle \varkappa, \mu, 2\rangle] \mid$
$\varkappa = 1, \ldots, j;\ \mu \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3); 3 < \mu \leqq i + 1\} \cup$
$\cup \{[\langle \varkappa, \mu-1, 1\rangle, \langle \varkappa, \mu, \nu\rangle] \mid$

$\varkappa = 1, \ldots, j;\ \mu \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3); 3 < \mu \leqq i+1; \nu = 1, 2\} \cup$
$\cup \{[\langle \varkappa, \mu-1, \nu\rangle, \langle \varkappa, \mu, \nu\rangle]\mid$
$\varkappa = 1, \ldots, j;\ \mu \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3); 3 < \mu \leqq i+1; \nu = 1, 2\} \cup$
$\cup \{[\langle \varkappa, \mu-1, \nu\rangle, \langle \varkappa, \mu, 1\rangle]\mid$
$\varkappa = 1, \ldots, j;\ \mu \equiv 0(\mathrm{mod}\ 3); 3 < \mu \leqq i+1; \nu = 1, 2\}$ für $i \geqq 2$.

(b) $\vartheta R_1^j \cong R_1^j$.

(c) $\vartheta R_0^j = \varnothing$.

Beweis analog.

(7.14) *Satz.*

(a) *Falls* $j \neq 3$, $i > 0$ *ist, gilt* $\iota\vartheta M_i^j = \vartheta M_{i-1}^j$.

(b) *Falls* $j \neq 3$, *gilt* $m(\vartheta M_i^j) = i$, $w(\vartheta M_i^j) = j$.

Beweis.

(a) Wie man aus Satz (7.11) leicht ablesen kann, gilt in ϑM_i^j
$d\langle -1, \nu\rangle = j-1 \neq 2$,
falls $i > 0$: $d\langle 0, 1\rangle = j+1$,
falls $i = 0$: $d\langle 0, 1\rangle = j-1$,
falls $0 < \mu < i$, $\mu \equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$: $d\langle \mu, 1\rangle = 4$,
falls $0 < \mu = i \equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$: $d\langle \mu, 1\rangle = 2$,
falls $0 < \mu < i$, $\mu \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$: $d\langle \mu, \nu\rangle = 3$,
falls $0 < \mu = i$, $\mu \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$: $d\langle \mu, \nu\rangle = 2$.
Also ist in ϑM_i^j dann und nur dann $d\langle \mu, \nu\rangle = 2$, wenn $0 < \mu = i$ gilt. Wenn $i > 0$, dann $(Ch\text{—}E^*)$ $(\vartheta M_i^j) = [\langle i-1, \nu'\rangle, \ldots, \langle i-1, \nu''\rangle]$, wobei $\nu' = \nu'' = 1$ für $i \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ und $\nu' = 1, \nu'' = 2$ für $i \not\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$. Im zweiten Falle ist auch $[\langle i-1, \nu'\rangle, \langle i-1, \nu''\rangle] \varepsilon E^*(\vartheta M_i^j)$. Aus diesen Tatsachen folgt für $j \neq 3$, $i > 0$ sofort $\iota\vartheta M_i^j = \vartheta M_{i-1}^j$.

(b) Ebenso sieht man gleich, daß, dalls $j \neq 3$, ϑM_0^j keine Punkte zweiten Grades hat: $\iota\vartheta M_0^j = \vartheta M_0^j$. Zusammen mit (a) folgt daraus $m(\vartheta M_i^j) = i$, $w(\vartheta M_i^j) = \alpha_0(\vartheta M_0^j) = j$.

(7.15) *Satz.* $m(\vartheta M_{2k}^3) = k+1$, $m(\vartheta M_{2k+1}^3) = k+1$,
$w(\vartheta M_{2k}^3) = 0$, $w(\vartheta M_{6k+1}^3) = 1$, $w(\vartheta M_{6k+3}^3) = 2$, $w(\vartheta M_{6k+5}^3) = 2$.

Beweis analog dem zu (7.14).

(7.16) *Satz.* (a) *Falls* $i > 0$ *ist, gilt* $\iota\vartheta D_i = \vartheta D_{i-1}$.
(b) $m(\vartheta D_i) = i$, $w(\vartheta D_i) = 1$.

Beweis analog dem zu (7.14).

(7.17) *Satz.* (a) *Falls* $i > 0$ *ist, gilt* $\iota\vartheta R_i^j = \vartheta R_{i-1}^j$.

(b) $m(\vartheta R_i^j) = i,\ w(\vartheta R_i^j) = 0.$

Beweis analog.

(7.18) *Satz.*

(a) *Wenn X zusammenhängend ist, dann ist $w(X) \neq 3$. (Dann ist auch ϑX zusammenhängend, also wiederum $w(\vartheta X) \neq 3$).*

(b) *Sind zwei nicht-negative ganze Zahlen m und w vorgegeben, $w \neq 3$, so gibt es stets einen zusammenhängenden, speziellen Graphen X derart, daß $m(\vartheta X) = m$, $w(\vartheta X) = w$ ist.*

Beweis.

(a) Wenn X zusammenhängend ist, so ist auch ιX zusammenhängend, demnach auch λX. Es gibt nur zwei zusammenhängende, spezielle Graphen mit genau drei Knotenpunkten: $E^*(X_1) = \{[1, 2], [2, 3]\}$, $E^*(X_2) = \{[1, 2], [2, 3], [3, 1]\}$. Aber es ist $m(X_1) = m(X_2) = 1$, $w(X_1) = 2$, $w(X_2) = 0$.

(b) folgt unmittelbar aus (7.14.b) für $w = 2, 4, 5, 6, \ldots$, aus (7.16.b) für $w = 1$, aus (7.17.b) für $w = 0$.

8. Die Transformation δ

(8.1) *Definition.* $V(\delta X) = \{\langle e, k\rangle \mid e \varepsilon E(X);\ k = 1, 2\}$,

$E(\delta X) = E(X) \cup E_1(\delta X)$,

$E_1(\delta X) = \{[\langle e', k'\rangle, \langle e'', k''\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X);\ k', k'' = 1, 2;\ \langle e', k'\rangle \neq \langle e'', k''\rangle;\ h_X\langle e', k'\rangle = h_X\langle e'', k''\rangle\}$.

Wenn $e \varepsilon E(X)$, dann $h_{\delta X}\langle e, k\rangle = \langle e, k\rangle$.

Wenn $\bar{e} = [\langle e', k'\rangle, \langle e'', k''\rangle] \varepsilon E_1(\delta X)$, dann

$$[h_{\delta X}\langle \bar{e}, 1\rangle, h_{\delta X}\langle \bar{e}, 2\rangle] = [\langle e', k'\rangle, \langle e'', k''\rangle].$$

(8.2) *Satz.* $d_{\delta X}\langle e, k\rangle = d_X(h_X\langle e, k\rangle)$.

Beweis. $d_X(v) = \operatorname{ord}\{\langle e, i\rangle \mid e \varepsilon E(X);\ i = 1, 2;\ h_X\langle e, i\rangle, = v\}$,

$d_{\delta X}\langle e, k\rangle = \operatorname{ord}\{\langle e', i\rangle \mid e' \varepsilon E(\delta X);\ i = 1, 2;\ h_{\delta X}\langle e', i\rangle = \langle e, k\rangle\} =$

$= \operatorname{ord}(\{\langle e', i\rangle \mid e' \varepsilon E(X);\ i = 1, 2;\ h_{\delta X}\langle e', i\rangle = \langle e, k\rangle\} \cup$

$\cup \{\langle e', i\rangle \mid e' \varepsilon E_1(\delta X);\ i = 1, 2;\ h_{\delta X}\langle e', i\rangle = \langle e, k\rangle\}) =$

$= \operatorname{ord}\{\langle e', i\rangle \mid e' \varepsilon E(X);\ i = 1, 2;\ h_{\delta X}\langle e', i\rangle = \langle e, k\rangle\} +$

$+ \operatorname{ord}\{\langle e', i\rangle \mid e' \varepsilon E_1(\delta X);\ i = 1, 2;\ h_{\delta X}\langle e', i\rangle = \langle e, k\rangle\}$.

Wir setzen $d_{\delta X}\langle e, k\rangle = d_0 + d_1$,

$d_0 = \operatorname{ord}\{\langle e', i\rangle \mid e' \varepsilon E(X);\ i = 1, 2;\ h_{\delta X}\langle e', i\rangle = \langle e, k\rangle\}$,

$d_1 = \operatorname{ord}\{\langle e', i\rangle \mid e' \varepsilon E_1(\delta X);\ i = 1, 2;\ h_{\delta X}\langle e', i\rangle = \langle e, k\rangle\}$.

$d_0 = \operatorname{ord}\{\langle e', i\rangle \mid e' \varepsilon E(X); i = 1, 2; h_{\delta X}\langle e', i\rangle = \langle e, k\rangle\} =$
$= \operatorname{ord}\{\langle e', i\rangle \mid e' \varepsilon E(X); i = 1, 2; \langle e', i\rangle = \langle e, k\rangle\} =$
$= \operatorname{ord}\{\langle e, k\rangle \mid e \varepsilon E(X); k = 1, 2\}$. Nun ist $\langle e, k\rangle$ ein fixer Punkt von δX, also e fix aus $E(X)$, k fix $= 1$ oder $= 2$. Somit $d_0 = 1$.

$d_1 = \operatorname{ord}\{\langle e', i\rangle \mid e' \varepsilon E_1(\delta X); i = 1, 2; h_{\delta X}\langle e', i\rangle = \langle e, k\rangle\} =$
$= \operatorname{ord}\{\langle e', i\rangle \mid e' \varepsilon \{[\langle e_1, k_1\rangle, \langle e_2, k_2\rangle] \mid e_1, e_2 \varepsilon E(X); k_1, k_2 = 1, 2;$
$\langle e_1, k_1\rangle \neq \langle e_2, k_2\rangle; h_X\langle e_1, k_1\rangle = h_X\langle e_2, k_2\rangle\}; i = 1. 2; h_{\delta X}\langle e', i\rangle = \langle e, k\rangle\}$.
Nun ist wegen $e' \varepsilon E_1(\delta X)$

$[h_{\delta X}\langle e', 1\rangle, h_{\delta X}\langle e', 2\rangle] = [\langle e_1, k_1\rangle, \langle e_2, k_2\rangle]$, also folgt aus $h_{\delta X}\langle e', i\rangle = \langle e, k\rangle$ daß entweder $\langle e_1, k_1\rangle = \langle e, k\rangle$ oder $\langle e_2, k_2\rangle = \langle e, k\rangle$. Beides kann nicht gelten, da $\langle e_1, k_1\rangle \neq \langle e_2, k_2\rangle$. D. h., daß i durch die übrigen Bedingungen festgelegt ist. Setzen wir noch o. B. d. A. $\langle e_1, k_1\rangle = \langle e, k\rangle$, so erhalten wir

$d_1 = \operatorname{ord}\{[\langle e, k\rangle, \langle e_2, k_2\rangle] \mid e, e_2 \varepsilon E(X); k, k_2 = 1, 2; \langle e, k\rangle \neq \langle e_2, k_2\rangle;$
$h_X\langle e, k\rangle = h_X\langle e_2, k_2\rangle\}$, oder, wegen $\langle e, k\rangle \varepsilon V(\delta X)$ fix,

$d_1 = \operatorname{ord}\{\langle e_2, k_2\rangle \mid e_2 \varepsilon E(X); k_2 = 1, 2; \langle e, k\rangle \neq \langle e_2, k_2\rangle; h_X\langle e, k\rangle =$
$= h_X\langle e_2, k_2\rangle\} =$
$= \operatorname{ord}\{\langle e_2, k_2\rangle \mid e_2 \varepsilon E(X); k_2 = 1, 2; h_X\langle e, k\rangle = h_X\langle e_2, k_2\rangle\} -$
$- \operatorname{ord}\{\langle e_2, k_2\rangle \mid e_2 \varepsilon E(X); k_2 = 1, 2; h_X\langle e, k\rangle = h_X\langle e_2, k_2\rangle, \langle e, k\rangle =$
$= \langle e_2, k_2\rangle\} = d_X(h_X\langle e, k\rangle) -$
$- \operatorname{ord}\{\langle e, k\rangle \mid e \varepsilon E(X); k = 1, 2; h_X\langle e, k\rangle = h_X\langle e, k\rangle\} = d_X(h_X\langle e, k\rangle) - 1.$

Zusammenfassend erhalten wir

$$d_{\delta X}\langle e, k\rangle = d_0 + d_1 = 1 + d_X(h_X\langle e, k\rangle) - 1 = d_X(h_X\langle e, k\rangle).$$

(8.3) *Satz.*

(a) $\alpha_0(\delta X) = \sum_{v \varepsilon V(X)} d_X(v) = 2\,\alpha_1(X).$

(b) $\alpha_1(\delta X) = \alpha_1(X) + \sum_{v \varepsilon V(X)} \binom{d_X(v)}{2} = \tfrac{1}{2} \sum_{v \varepsilon V(X)} [d_X(v)]^2.$

Beweis. Man sieht unmittelbar aus der Definition von $V(\delta X)$, daß $\alpha_0(\delta X) = 2\,\alpha_1(X)$ ist. Nun gilt nach (1.11) allgemein $\alpha_1(X) = \tfrac{1}{2} \sum_{v \varepsilon V(X)} d_X(v)$, also ist $\alpha_0(\delta X) = \sum_{v \varepsilon V(X)} d_X(v)$.

Wir stellen nun eine Zuordnung zwischen den Knotenpunkten von X und denen von δX her, u. zw. sollen $\langle e, k\rangle \varepsilon V(\delta X)$ und $h_X\langle e, k\rangle \varepsilon V(X)$ einander entsprechen. Auf diese Weise wird jedem Knotenpunkt von δX genau ein Knotenpunkt von X zugeordnet, und jedem Knotenpunkt von X genau $d_X(v)$ Knotenpunkte von δX. Daraus kann man zunächst wieder $\alpha_0(\delta X) \sum_{v \varepsilon V(X)} d_X(v)$ ablesen. Wir wollen nun die zu einem $v_i \varepsilon V(X)$

gehörigen Elemente von $V(\delta X)$ mit $v_{i,j}$, $j = 1, \ldots, d_X(v_i)$ bezeichnen. Dann läßt sich Satz (8.2) in der Form $d_{\delta X}(v_{i,j}) = d_X(v_i)$ schreiben, und aus $\alpha_1(\delta X) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(\delta X)} d_{\delta X}(v)$ wird $\alpha_1(\delta X) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(X)} [d_X(v)]^2$. Vergleicht man mit Definition (8.1), so sieht man, daß für $j \neq k$ stets $v_{i,j}$ mit $v_{i,k}$ durch eine Kante von $E_1(\delta X)$ verbunden ist, und daß jede Kante aus $E_1(\delta X)$ ein $v_{i,j}$ mit einem $v_{i,k}$, $j \neq k$, verbindet. Daher muß $\operatorname{ord} E_1(\delta X) = \sum_{v \in V(X)} \binom{d_X(v)}{2}$ sein.

Daraus folgt $\alpha_1(\delta X) = \alpha_1(X) + \sum_{v \in V(X)} \binom{d_X(v)}{2}$. Die beiden für $\alpha_1(\delta X)$ gefundenen Ausdrücke lassen sich auch leicht formal ineinander überführen:

$$\alpha_1(X) + \sum_{v \in V(X)} \binom{d_X(v)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(X)} d_X(v) + \frac{1}{2} \sum_{v \in V(X)} [d_X(v) - 1]\, d_X(v) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{v \in V(X)} [d_X(v)]^2.$$

(8.4) *Satz.* $\chi(\delta X) = \max_{v \in V(X)} d_X(v)$.

Beweis.

1. Wir benützen wieder die im Beweis zum vorigen Satze eingeführte Bezeichnungsweise für die einander zugeordneten Knotenpunkte von X und δX. Da jedem $v_i \in V(X)$ genau $d_X(v_i)$ verschiedene $v_{i,j} \in V(\delta X)$, $j = 1, \ldots, d_X(v_i)$ entsprechen, da diese paarweise miteinander verbunden sind, und da jeder vom Grade $d_X(v_i)$ ist, ergibt sich sofort, $d_X(v_i) > 0$ vorausgesetzt, daß jedes $v_{i,j}$ außer den anderen $v_{i,k}$ noch genau einen Nachbarn haben muß. Wir wollen ihn mit $Nv_{i,j}$ bezeichnen. Die einem Knotenpunkt $v_{i,j}$ zugeordnete Farbe wollen wir mit $\varphi(v_{i,j})$ bezeichnen. Der Beweis wird in mehreren Abschnitten geführt.

2. Wir zeigen zunächst: Sind $\varphi(Nv_{i,1})$, $\varphi(Nv_{i,2})$, $\ldots$, $\varphi(Nv_{i,n})$ vorgegeben, $n = d_X(v_i)$, jedoch so, daß nicht alle einander gleich sind, dann kann man $\varphi(v_{i,1})$, $\varphi(v_{i,2})$, $\ldots$, $\varphi(v_{i,n})$ so bestimmen, daß man mit n Farben auskommt, die $\varphi(Nv_{i,j})$ mitgerechnet. Da nicht alle $\varphi(Nv_{i,j})$ einander gleich sind, nehmen wir o. B. d. A. $\varphi(Nv_{i,1}) \neq \varphi(Nv_{i,2})$ an.
Wir wählen aus den n verfügbaren Farben $\varphi(v_{i,n}) \neq \varphi(Nv_{i,n})$.
Dann wählen wir aus den $n-1$ restlichen Farben $\varphi(v_{i,n-1}) \neq \varphi(Nv_{i,n-1})$.
Dann wählen wir aus den $n-2$ restlichen Farben $\varphi(v_{i,n-2}) \neq \varphi(Nv_{i,n-2})$.

$\ldots$

Dann wählen wir aus den 3 restlichen Farben $\varphi(v_{i,3}) \neq \varphi(Nv_{i,3})$.
Danach bleiben noch $\varphi(v_{i,2})$ und $\varphi(v_{i,1})$ zu wählen. Dafür stehen noch

zwei Farben zur Verfügung, und es muß $\varphi(v_{i,2}) \neq \varphi(Nv_{i,2})$, $\varphi(v_{i,1}) \neq \varphi(Nv_{i,1})$ sein. Dies ist wegen $\varphi(Nv_{i,1}) \neq \varphi(Nv_{i,2})$ stets möglich.

3. Sind noch nicht alle $\varphi(Nv_{i,j})$, $j = 1, \ldots, n$, $n = d_X(v_i)$, festgelegt, so lassen sich die $\varphi(v_{i,j})$, $j = 1, \ldots, n$, so bestimmen, daß man mit n Farben auskommt. Dies folgt unmittelbar aus 2.

4. Sind alle $\varphi(Nv_{i,j})$, $j = 1, \ldots, n$, $n = d_X(v_i)$, festgelegt und einander gleich, so braucht man, wenn man auch die $\varphi(v_{i,j})$ festlegen will, zusammen offenbar $n + 1$ Farben.

5. Sei $v_1, v_2, \ldots, v_r, v_1$ ein Kreis in X. Dann gibt es unter den $v_{i,j}$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, n_i$, $n_i = d_X(v_i)$ genau $2r$ Knotenpunkte, die einen Kreis in δX bilden. Man kann die j so wählen, daß sich dieser Kreis $v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, \ldots, v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots, v_{r,1}, v_{r,2}, v_{1,1}$ schreiben läßt. Seien nun alle $\varphi(Nv_{i,j})$, $j > 2$, festgelegt und einander gleich. Dann kann man bei der Festlegung der $\varphi(v_{i,j})$ mit zusammen $n_0 = \max n_i$ Farben auskommen. Man beachte nämlich, daß keiner der Knotenpunkte $v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{r,1}, v_{r,2}$ einem der Knotenpunkte $Nv_{i,j}$, $i = 1, \ldots, r$, $j > 2$ benachbart ist. Man kann also $\varphi(v_{i,1}) = \varphi(Nv_{i,j})$, $i = 1, \ldots, r$, $j > 2$, setzen. Im weiteren gibt es dann keine Schwierigkeiten mehr.

6. Es liege nun ein Graph δX vor. Wir wollen eine Farbenzuordnung mit $\max\limits_{v \in V(X)} d_X(v)$ Farben finden. Wir bestimmen Farben für alle $v_{1,j}$, die einem $v_1 \in V(X)$ zugeordnet sind. Dann machen wir das gleiche für einen Nachbarpunkt v_2 von v_1. Wir setzen dieses Verfahren solange fort, als es möglich ist. Es kann sein, daß wir dieserart den ganzen Graphen δX mit Farben versehen können. Dann ist nichts mehr zu zeigen. Es kann aber auch sein, daß es gewiß v_ν gibt, derart, daß wir die zugehörigen $v_{\nu,j}$ nicht alle auf diese Art einfärben können. Wegen 3. können zwei solche v_ν nicht benachbart sein. Wegen 2. und 4. muß für jeden solchen Knotenpunkt $v_\nu \in V(X)$ $d_X(v_\nu) = \max\limits_{v_i \in V(X)} d_X(v_i)$ gelten und alle $\varphi(Nv_{\nu,j})$ müssen gleich sein.

Sei nun v_ν ein Knotenpunkt von X, derart, daß die $v_{\nu,j}$ eine solche Lücke in der gesuchten Farbenzuordnung von δX bilden. Sei v_{ν_1} ein Nachbar von v_ν, v_{ν_2} ein anderer Nachbar von v_{ν_1}, usw. Wir tilgen die nun schon getroffene Farbenzuordnung für die $v_{\nu_1,j}$, dann, wenn nötig, die für die $v_{\nu_2,j}$, usf. Auf diese Weise dehnen wir die Lücke so lange aus, bis einer der folgenden Fälle eintritt:

A) Nicht alle Nachbarpunkte der Lücke tragen dieselbe Farbe.

B) Wir sind bei einem Knotenpunkt 1. Grades angelangt.

C) Der Lücke in δX entspricht in X

C1) ein Kreis, oder

C2) ein zum Graphen ○—• homöomorpher Untergraph.

In den Fällen A) und B) kann man nun gemäß 2. der Reihe nach die $v_{\nu,j}$, $v_{\nu_1,j}$, ... einfärben. Im Falle C2) geht man solange auf die gleiche Weise vor, bis man beim Fall C1) anlangt. Dann färbt man gemäß 5.

Auf diese Weise beseitigt man sukzessive alle Lücken, bis man eine komplette Farbenzuordnung mit $\max\limits_{v \in V(X)} d_X(v)$ Farben gefunden hat. Daraus folgt zunächst $\chi(\delta X) \leqq \max\limits_{v \in V(X)} d_X(v)$.

7. Es muß in X mindestens einen Knotenpunkt v_0 mit $d_X(v_0) = \max\limits_{v \in V(X)} d_X(v)$ geben. Diesem entsprechen in δX genau $d_X(v_0)$ paarweise miteinander verbundene Knotenpunkte $v_{0,j}$. Also ist $\chi(\delta X) \geqq \max\limits_{v \in V(X)} d_X(v)$. Zusammen ergibt sich $\chi(\delta X) = \max\limits_{v \in V(X)} d_X(v)$.

(8.5) *Satz.* $\vartheta\eta X \cong \delta X$.

Beweis. 1. $V(\vartheta X) = E(X)$,

$E(\vartheta X) = \{[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e', e'' \in E(X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \neq \langle e'', i''\rangle; h_X\langle e', i'\rangle = h_X\langle e'', i''\rangle\}$,

$[h_{\vartheta X}\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], 1\rangle, h_{\vartheta X}\langle[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle], 2\rangle] = [e', e'']$.

$V(\eta X) = V(X) \cup E(X)$,

$E(\eta X) = \{\langle e, k\rangle \mid e \in E(X); k = 1, 2\}$,

$h_{\eta X}\langle\langle e, k\rangle, 1\rangle = h_X\langle e, k\rangle, h_{\eta X}\langle\langle e, k\rangle, 2\rangle = e$.

2. $V(\vartheta\eta X) = E(\eta X) = \{\langle e, k\rangle \mid e \in E(X); k = 1, 2\} = V(\delta X)$.

3. $E(\vartheta\eta X) = \{[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e', e'' \in E(\eta X); i', i'' = 1, 2; \langle e', i\rangle \neq \neq \langle e'', i''\rangle; h_{\eta X}\langle e', i'\rangle = h_{\eta X}\langle e'', i''\rangle\} = \{[\langle e', i'\rangle, \langle e'', i''\rangle] \mid e', e'' \in \{\langle e, k\rangle \mid e \in E(X); k = 1, 2\}; i', i'' = 1, 2; \langle e', i'\rangle \neq \langle e'', i''\rangle; h_{\eta X}\langle e', i'\rangle = h_{\eta X}\langle e'', i''\rangle\} = \{[\langle\langle e', k'\rangle, i'\rangle, \langle\langle e'', k''\rangle, i''\rangle] \mid e', e'' \in E(X); k', k'', i', i'' = 1, 2; \langle\langle e', k'\rangle, i'\rangle \neq \langle\langle e'', k''\rangle, i''\rangle; h_{\eta X}\langle\langle e', k'\rangle, i'\rangle = = h_{\eta X}\langle\langle e'', k''\rangle, i''\rangle\}$.

Wenn $i' = 1$, dann $h_{\eta X}\langle\langle e', k'\rangle, i'\rangle = h_{\eta X}\langle\langle e', k'\rangle, 1\rangle = h_X\langle e', k'\rangle \in V(X)$.

Wenn $i'' = 1$, dann $h_{\eta X}\langle\langle e'', k''\rangle, i''\rangle = h_X\langle e'', k''\rangle \in V(X)$.

Wenn $i' = 2$, dann $h_{\eta X}\langle\langle e', k'\rangle, i'\rangle = h_{\eta X}\langle\langle e', k'\rangle, 2\rangle = e' \in E(X)$.

Wenn $i'' = 2$, dann $h_{\eta X}\langle\langle e'', k''\rangle, i''\rangle = e'' \in E(X)$.

Aus $h_{\eta X}\langle\langle e', k'\rangle, i'\rangle = h_{\eta X}\langle\langle e'', k''\rangle, i''\rangle$ folgt $i' = i''$.

$E(\vartheta\eta X) = \{[\langle\langle e', k'\rangle, i\rangle\ \langle\langle e'', k''\rangle, i\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); k', k'', i = 1, 2;$
$\langle e', k'\rangle \neq \langle e'', k''\rangle; h_{\eta X}\langle\langle e', k'\rangle, i\rangle = h_{\eta X}\langle\langle e'', k''\rangle, i\rangle\} =$
$= \{[\langle\langle e', k'\rangle, 1\rangle, \langle\langle e'', k''\rangle, 1\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); k', k'' = 1, 2;$
$\langle e', k'\rangle \neq \langle e'', k''\rangle; h_X\langle e', k'\rangle = h_X\langle e'', k''\rangle\} \cup$
$\cup \{[\langle\langle e'\ k'\rangle, 2\rangle, \langle\langle e'', k''\rangle, 2\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); k', k'' = 1, 2;$
$\langle e', k'\rangle \neq \langle e'', k''\rangle; e' = e''\}$. Setzen wir im zweiten Term $e' = e'' = e$, so wird $\langle e', k'\rangle \neq \langle e'', k''\rangle, \langle e, k'\rangle \neq \langle e, k''\rangle, k' \neq k''$, also
$[\langle\langle e', k'\rangle, 2\rangle, \langle\langle e'', k''\rangle, 2\rangle] = [\langle\langle e, 1\rangle, 2\rangle, \langle\langle e, 2\rangle, 2\rangle]$.
$E(\vartheta\eta X) = \{[\langle\langle e', k'\rangle, 1\rangle, \langle\langle e'', k''\rangle, 1\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); k', k'' = 1, 2;$
$\langle e', k'\rangle \neq \langle e'', k''\rangle; h_X\langle e', k'\rangle = h_X\langle e'', k''\rangle\} \cup$
$\cup \{[\langle\langle e, 1\rangle, 2\rangle, \langle\langle e, 2\rangle, 2\rangle] \mid e \varepsilon E(X)\}$.
Führt man nun die Transformation
$\langle\langle e, k\rangle, 1\rangle \leftrightarrow \langle e, k\rangle, [\langle\langle e, 1\rangle, 2\rangle, \langle\langle e, 2\rangle, 2\rangle] \leftrightarrow e$
ein, so wird
$E(\vartheta\eta X) = \{[\langle e', k'\rangle, \langle e'', k''\rangle] \mid e', e'' \varepsilon E(X); k', k'' = 1, 2; \langle e', k'\rangle \neq$
$\neq \langle e'', k''\rangle; h_X\langle e', k'\rangle = h_X\langle e'', k''\rangle\} \cup E(X) = E(\delta X)$.

4. $[h_{\vartheta\eta X}\langle[\langle\langle e', k'\rangle, 1\rangle, \langle\langle e'', k''\rangle, 1\rangle], 1\rangle,$
$h_{\vartheta\eta X}\langle[\langle\langle e', k'\rangle, 1\rangle, \langle\langle e'', k''\rangle, 1\rangle], 2\rangle] = [\langle e', k'\rangle, \langle e'', k''\rangle],$
$[h_{\vartheta\eta X}\langle[\langle\langle e, 1\rangle, 2\rangle, \langle\langle e, 2\rangle, 2\rangle], 1\rangle,$
$h_{\vartheta\eta X}\langle[\langle\langle e, 1\rangle, 2\rangle, \langle\langle e, 2\rangle, 2\rangle], 2\rangle] = [\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle]$.
Wendet man nun die gleiche Transformation wie vorhin an, so erhält man
$[h_{\vartheta\eta X}\langle[\langle e', k'\rangle, \langle e'', k''\rangle], 1\rangle, h_{\vartheta\eta X}\langle[\langle e', k'\rangle, \langle e'', k''\rangle], 2\rangle] =$
$= [\langle e', k'\rangle, \langle e'', k''\rangle],$
$[h_{\vartheta\eta X}\langle e, 1\rangle, h_{\vartheta\eta X}\langle e, 2\rangle] = [\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle]$, also $h_{\vartheta\eta X} = h_{\delta X}$.

5. Faßt man 2. 3. und 4. zusammen, so ergibt sich $\vartheta\eta X \cong \delta X$.

(8.6) *Anmerkung.* Die Transformation δ ersetzt jeden Knotenpunkt n-ten Grades durch n paarweise miteinander verbundene Knotenpunkte n-ten Grades. Vergleiche auch [6].

Nachwort

Der Autor hat in der vorliegenden Arbeit einige wichtige Graphentransformationen eingeführt und ihre Eigenschaften sowie wechselseitigen Beziehungen untersucht. Um diese Aufgabe formal zu bewältigen, hat er die Graphen nicht, wie es sonst meistens üblich ist, durch Angabe von $V(X)$, $E(X)$ und f_X beschrieben, sondern vermittels $V(X)$, $E(X)$ und der von ihm eigens zu diesem Zweck eingeführten Funktion

h_X. Diese V-E-h-Notation, wie wir sie kurz nennen wollen, hat sich beim Rechnen mit Graphentransformationen als ein sehr brauchbares Mittel erwiesen. Viele Sätze wären ohne sie unbewiesen geblieben, manche hätten sich sogar nur sehr umständlich formulieren lassen. Der Autor war bemüht, anschauliche Beschreibungen so weit als möglich durch exakte Rechenformalismen zu ersetzen und er ist der Meinung, neben dem Hauptthema dieser Abhandlung, der Erforschung von Graphentransformationen, auch in dieser Richtung einen prinzipiellen Beitrag zur Graphentheorie geleistet zu haben.

Literatur

[1] *G. A. Dirac*, "A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs", J. Lond. Math. Soc. **27**, 85—92 (1952).

[2] *R. Frucht*, „Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe", Compos. Math. **6**, 239—250 (1938).

[3] *R. Frucht*, "Graphs of degree 3 with given abstract group", Canad. J. Math. **1**, 365—378 (1949).

[4] *H. Izbicki*, „Reguläre Graphen 3., 4. und 5. Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen", Mh. Math. **61**, 42—50 (1957).

[5] *H. Izbicki*, „Unendliche Graphen endlichen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften", Mh. Math. **63**, 298—301 (1959).

[6] *H. Izbicki*, „Reguläre Graphen beliebigen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften", Mh. Math. **64** (1960).

[7] *H. Izbicki*, „Über die explizite Automorphismengruppe von Graphen", J. f. reine und angew. Math.

[8] *I. N. Kagno*, "Linear graphs of Degree ≤ 6 and their groups", Amer. J. Math. **68**, 505—520 (1946).

[9] *D. König*, „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen", Leipzig 1936.

[10] *A. Kotzig*, „Aus der Theorie der endlichen regulären Graphen dritten und vierten Grades" (Slowakisch, mit russischem und deutschem Auszug), Čas. pěst. mat. **82**, 76—92 (1957).

[11] *T. Morita*, "Theory of classical fluids: Hyper-netted chain approximations, I. Formulation for a one-component system", Progr. Theor. Physics **20**, No. 6, 920—938 (1958).

[12] *G. Sabidussi*, "Graphs with given group and given graph-theoretical properties", Canad. J. Math. **9**, 515—525 (1957).

[13] *G. Sabidussi*, "On the minimal order of graphs with given automorphism group", Mh. Math. **63**, 124—127 (1959).

[14] *G. Sabidussi*, "Graph multiplication", Math. Zeitschr. (eingereicht).

[15] *G. Sabidussi*, "On a class of fixed-point-free graphs", Proc. Amer. Math. Soc. **9**, No. 5, 800—804 (1958).

[16] *H. Whitney*, "Congruent graphs and the connectivity of graphs", Amer. J. Math. **54**, 150—168 (1932).

Zur Theorie der Vollideale

Von

Wilfried Nöbauer, Wien

(Eingegangen am 1. Juli 1959)

Im ersten Teil der Arbeit [2] wurden von mir einige allgemeine Sätze über Vollideale des Polynomringes in einer Unbestimmten über einen beliebigen kommutativen Ring mit Einheitselement abgeleitet. Wie ich in der Arbeit [3] gezeigt habe, lassen sich diese Sätze sämtlich übertragen auf Polynome in mehreren Unbestimmten. In dieser Arbeit sollen nun einige weitere Sätze über Vollideale bewiesen werden, und zwar gleich für den allgemeinen Fall von mehreren Unbestimmten. Die Definitionen und Sätze von [3] setzen wir dabei als bekannt voraus; der Begriff der Ringhalbgruppe, zu dem wir in den beiden erwähnten Arbeiten durch den Vollidealbegriff geführt wurden, soll hier aber außer Betracht bleiben.

Es sei also $\mathfrak{r}$ ein kommutativer Ring mit Einheitselement und $R = \mathfrak{r}[x_1, x_2 \ldots x_k] = \mathfrak{r}[\mathfrak{x}]$ ein Polynomring über $\mathfrak{r}$ in den Unbestimmten $x_1, x_2 \ldots x_k$.

Satz 1: *Summe und Durchschnitt von beliebig vielen Vollidealen aus R sind wieder Vollideale und ihr Umschließungsideal ergibt sich aus den Umschließungsidealen der Vollideale durch Summen- bzw. Durchschnittsbildung.*

Beweis: Daß Summe und Durchschnitt wieder Vollideale sind, erkennt man daraus, daß sie die definierende Bedingung für Vollideale erfüllen. Die Richtigkeit der Behauptung über die Umschließungsideale ergibt sich bei der Summe aus dem Erfülltsein der für das Umschließungsideal charakteristischen Beziehung [3], Satz 3, beim Durchschnitt hingegen aus der Tatsache, daß das Umschließungsideal eines Vollideals $V \subseteq R$ gegeben ist durch $V \cap \mathfrak{r}$.

Satz 2: *Es sei V ein Vollideal in R, dessen Umschließungsideal $\mathfrak{v}$ Produkt der teilerfremden Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist. Dann läßt sich V darstellen als Produkt eines Vollideals A mit Umschließungsideal $\mathfrak{a}$ und eines Vollideales B mit Umschließungsideal $\mathfrak{b}$.*

Beweis: Wir bilden die von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ in R erzeugten Ideale $(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{b})$; diese sind Vollideale in R, daher sind auch die Ideale

$$A = (V, (\mathfrak{a})) \text{ und } B = (V, (\mathfrak{b}))$$

Vollideale in R. Wir haben

$$(\mathfrak{a}) \subseteq (V, (\mathfrak{a})) \subseteq (\{\mathfrak{v}\}, (\mathfrak{a})) \subseteq \{\mathfrak{a}\}$$

also ist $\mathfrak{a}$ das Umschließungsideal von A. Ebenso erkennt man, daß $\mathfrak{b}$ das Umschließungsideal von B ist.

Weiter gilt

$$A\,B = (V, (\mathfrak{a}))\,(V, (\mathfrak{b})) = (V^2, (\mathfrak{a})\,V, V\,(\mathfrak{b}), (\mathfrak{a})\,(\mathfrak{b}))$$

und daraus ergibt sich wegen $(\mathfrak{a})\,(\mathfrak{b}) \subseteq (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{v})$ die Beziehung $AB \subseteq V$. Andererseits aber sind A und B ersichtlich teilerfremd, deshalb gilt

$$A\,B = A \cap B = (V, (\mathfrak{a})) \cap (V, (\mathfrak{b})) \supseteq V$$

also gilt $V = A\,B$ w.z.z.w.

Auf Grund des soeben bewiesenen Satzes ist es z. B. möglich, die Ermittlung aller Vollideale des Polynomringes $\mathfrak{g}[\mathfrak{x}]$ über den Ring $\mathfrak{g}$ der ganzen rationalen Zahlen zurückzuführen auf die Ermittlung aller der Vollideale, deren Umschließungsideal durch eine Primzahlpotenz erzeugt wird.

Es sei nun ϑ ein Homomorphismus des Ringes $\mathfrak{r}$ auf den Ring $\mathfrak{t}$. Durch die Festsetzung

$$\Theta \Sigma a_{\nu_1 \dots \nu_k} x_1^{\nu_1} \dots x_k^{\nu_k} = \Sigma\, (\vartheta\, a_{\nu_1 \dots \nu_k})\, x_1^{\nu_1} \dots x_k^{\nu_k}$$

setzen wir ihn zu einem Homomorphismus Θ des Ringes R auf den Ring $T = \mathfrak{t}[\mathfrak{x}]$ fort. Für diesen Homomorphismus Θ gelten folgende Sätze:

Satz 3: Das Bild des Vollideales V von R mit dem Umschließungsideal $\mathfrak{v}$ bei Θ ist ein Vollideal W von T mit dem Umschließungsideal $\vartheta\mathfrak{v}$.

Beweis: Daß ΘV ein Ideal in T ist, ist klar. Ist $t(\mathfrak{x}) \in \Theta V$ und $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ ein k-Tupel von Polynomen aus T, so wählen wir $r(\mathfrak{x}) \in V$ und das k-Tupel $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ von Polynomen aus R so, daß

$$\Theta r(\mathfrak{x}) = t(\mathfrak{x}) \qquad \Theta \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{x})$$

dann haben wir

$$\Theta r\,(\mathfrak{f}(\mathfrak{x})) = t\,(\mathfrak{g}(\mathfrak{x})) \in \Theta V$$

also ist ΘV wirklich Vollideal. Die Behauptung über das Umschließungsideal ergibt sich folgendermaßen: Wie man gleich sieht, gilt für jedes beliebige Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$

$$\Theta(\mathfrak{a}) = (\vartheta\mathfrak{a})$$

Es gilt aber auch

$$\Theta\{\mathfrak{a}\} \subseteq \{\vartheta\mathfrak{a}\}$$

denn ist $g(\mathfrak{x}) \in \Theta\{\mathfrak{a}\}$ und $\mathfrak{z}$ ein k-Tupel von Elementen aus $\mathfrak{t}$, so wählen wir $f(\mathfrak{x}) \in \{\mathfrak{a}\}$ und ein k-Tupel $\mathfrak{y}$ von Elementen aus $\mathfrak{r}$ so, daß gilt

$$\Theta f(\mathfrak{x}) = g(\mathfrak{x}) \qquad \vartheta\mathfrak{y} = \mathfrak{z}$$

Wir haben dann

$$\vartheta f(\mathfrak{y}) = g(\mathfrak{z}) \in \vartheta\mathfrak{a}$$

also gilt $g(\mathfrak{x}) \in \{\vartheta\mathfrak{a}\}$.

Wendet man nun auf die Beziehung

$$(\mathfrak{v}) \subseteq V \subseteq \{\mathfrak{v}\}$$

den Homomorphismus Θ an, so erhält man

$$(\vartheta\mathfrak{v}) \subseteq W \subseteq \{\vartheta\mathfrak{v}\}$$

das heißt, $\vartheta\mathfrak{v}$ ist Umschließungsideal von W.

Satz 4: *Es sei W Vollideal in T mit dem Umschließungsideal $\mathfrak{w}$. V sei die Urbildmenge von W in R bei Θ und $\mathfrak{v}$ die Urbildmenge von $\mathfrak{w}$ in $\mathfrak{r}$ bei ϑ. Dann ist V Vollideal in R und $\mathfrak{v}$ sein Umschließungsideal.*

Beweis: Daß V Ideal in R ist, ist klar. Ist $r(\mathfrak{x}) \in V$ und $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ ein k-Tupel von Polynomen aus R, so gilt $\Theta r(\mathfrak{x}) = t(\mathfrak{x}) \in W$ und wir haben also

$$\Theta r\,(\mathfrak{f}(\mathfrak{x})) = t\,(\Theta\,\mathfrak{f}(\mathfrak{x})) \in W$$

also gilt $r\,(\mathfrak{f}(\mathfrak{x})) \in V$, also ist V Vollideal.

Um die Behauptung über das Umschließungsideal zu beweisen, bezeichnen wir allgemein die Urbildmenge eines Ideales $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{t}$ bei ϑ mit $\lambda\mathfrak{b}$ und die Urbildmenge eines Ideales $B \subseteq T$ bei Θ mit ΛB. Dann gilt zunächst ersichtlich für jedes $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{t}$

$$\Lambda(\mathfrak{b}) = (\lambda\mathfrak{b})$$

es gilt aber auch

$$\Lambda\{\mathfrak{b}\} = \{\lambda\mathfrak{b}\}$$

denn für $f(\mathfrak{x}) \in \Lambda\{\mathfrak{b}\}$ gilt $\Theta f(\mathfrak{x}) = g(\mathfrak{x}) \in \{\mathfrak{b}\}$ und daher für jedes k-Tupel $\mathfrak{y}$ von Elementen aus $\mathfrak{r}$ die Beziehung

$$\vartheta f(\mathfrak{y}) = g(\vartheta\mathfrak{y}) \in \mathfrak{b} \text{ also } f(\mathfrak{y}) \in \lambda\mathfrak{b}$$

das heißt $\Lambda\{\mathfrak{b}\} \subseteq \{\lambda\mathfrak{b}\}$. Andererseits sei $f(\mathfrak{x}) \in \{\lambda\mathfrak{b}\}$, dann gilt für jedes k-Tupel $\mathfrak{y}$ die Beziehung $f(\mathfrak{y}) \in \lambda\mathfrak{b}$; daraus folgt, daß mit $g(\mathfrak{x}) = \Theta f(\mathfrak{x})$ gilt

$$\vartheta f(\mathfrak{y}) = g(\vartheta\mathfrak{y}) \in \mathfrak{b} \text{ also } g(\mathfrak{x}) \in \{\mathfrak{b}\}$$

also $f(\mathfrak{x}) \in A\{\mathfrak{b}\}$, das heißt $\{\lambda\mathfrak{b}\} \subseteq A\{\mathfrak{b}\}$. Nun ergibt sich die Behauptung wieder aus

$$(\mathfrak{w}) \subseteq W \subseteq \{\mathfrak{w}\}$$

durch Anwendung von A.

Als Anwendung der beiden soeben bewiesenen Sätze nehmen wir an, daß $\mathfrak{t} = \mathfrak{r} \mid \mathfrak{a}$ der Restklassenring von $\mathfrak{r}$ nach dem Ideal $\mathfrak{a}$ und ϑ der natürliche Homomorphismus von $\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{r} \mid \mathfrak{a}$ sei. Ist nun V ein Vollideal in R mit dem Umschließungsideal $\mathfrak{a}$, so ist ΘV Vollideal in T mit dem Umschließungsideal (0); wegen $(\mathfrak{a}) \subseteq V$ gilt für dieses

$$A(\Theta V) = V$$

Ist andererseits W ein Vollideal in T mit dem Umschließungsideal (0), dann ist AW Vollideal in R mit dem Umschließungsideal $\mathfrak{a}$, für welches gilt

$$\Theta(AW) = W$$

Daraus ergibt sich folgender

Satz 5: Man erhält genau alle Vollideale von R mit dem Umschließungsideal $\mathfrak{a}$, wenn man in AW das W alle Vollideale von T mit dem Umschließungsideal (0) *durchlaufen läßt.*

Setzt man voraus, daß $\mathfrak{a}$ und W eine endliche Basis haben, so kann man AW aus W auf sehr einfache Art erhalten. Ist nämlich

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2 \dots a_j)$$

$$W = (f_1(\mathfrak{x}), f_2(\mathfrak{x}) \dots f_l(\mathfrak{x}))$$

so bestimme man in R Polynome

$$F_1(\mathfrak{x}), F_2(\mathfrak{x}) \dots F_l(\mathfrak{x})$$

mit

$$\Theta F_i(\mathfrak{x}) = f_i(\mathfrak{x}) \text{ für } i = 1, 2 \dots l$$

Dann gilt:

$$AW = (F_1(\mathfrak{x}), F_2(\mathfrak{x}) \dots F_l(\mathfrak{x}), a_1, a_2 \dots a_j)$$

wie leicht zu erkennen ist.

Schließlich können wir ergänzend zu Satz 5 auch noch sagen:

Ist $W = W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_r$ Durchschnitt der Vollideale W_i mit dem Umschließungsideal (0), *dann gilt*

$$AW = AW_1 \cap AW_2 \cap \dots \cap AW_r$$

Man erkennt ja ohne Mühe, daß hier die linke Seite in der rechten enthalten ist und die rechte Seite in der linken.

Milgram hat in [1] bewiesen, daß für den Fall, daß $\mathfrak{r}$ der Restklassenkörper modulo irgendeiner Primzahl p ist, die Gesamtheit der Vollideale von $R = \mathfrak{r}[x]$ mit dem Umschließungsideal (0) gegeben ist durch die Ideale, welche sich darstellen lassen als Durchschnitt einer endlichen Anzahl von Idealen der Gestalt $((x^{p^n} - x)^m)$ mit $m > 0$. Daraus folgt auf Grund unserer Ergebnisse:

Ist p eine Primzahl, so ist die Gesamtheit der Vollideale des Polynomringes $\mathfrak{g}[x]$ über den Ring $\mathfrak{g}$ der ganzen rationalen Zahlen mit Umschließungsideal (p) gegeben durch die Ideale, welche sich darstellen lassen als Durchschnitt von endlich vielen Idealen der Gestalt $((x^{p^\alpha} - x)^m, p)$ mit $m > 0$.

Wir wollen nun zeigen, wie man aus einem gegebenen Vollideal von R weitere Vollideale erhalten kann. Das Mittel dazu ist folgender

Satz 6: Es sei V Vollideal in $R = \mathfrak{r}[x_1, x_2 \dots x_k]$. Dann ist die Menge aller Polynome $f(\mathfrak{x}) \in R$, für welche gilt

$$f(\mathfrak{x}) \in V \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \in V \text{ für } i = 1, 2 \dots k$$

ebenfalls ein Vollideal in R.

Dieses Vollideal wollen wir die Ableitung von V nennen und mit V' bezeichnen.

Beweis: Ersichtlich gilt $0 \in V'$, also ist V' nicht leer. Aus $f(\mathfrak{x}) \in V'$ und $g(\mathfrak{x}) \in V'$ folgt sogleich $f(\mathfrak{x}) - g(\mathfrak{x}) \in V$ und $\frac{\partial}{\partial x_i}(f(\mathfrak{x}) - g(\mathfrak{x})) \in V$, also gilt $f(\mathfrak{x}) - g(\mathfrak{x}) \in V'$; aus $f(\mathfrak{x}) \in V'$ und $r(\mathfrak{x}) \in R$ folgt $r(\mathfrak{x}) f(\mathfrak{x}) \in V$ sowie auch $\frac{\partial}{\partial x_i}(r(\mathfrak{x}) f(\mathfrak{x})) = \frac{\partial r}{\partial x_i} f + r \frac{\partial f}{\partial x_i} \in V$, also gilt $r(\mathfrak{x}) f(\mathfrak{x}) \in V'$. Somit ist V' Ideal in R. Schließlich sei $f(\mathfrak{x}) \in V'$ und $\mathfrak{r}(\mathfrak{x}) = (r_1(\mathfrak{x}) \dots r_k(\mathfrak{x}))$ ein k-Tupel von Polynomen aus R; wir haben dann $f(\mathfrak{r}(\mathfrak{x})) \in V$ sowie

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathfrak{r}(\mathfrak{x})) = \sum_{\varrho=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_\varrho}(\mathfrak{r}(\mathfrak{x})) \frac{\partial r_\varrho}{\partial x_i} \in V$$

also gilt $f(\mathfrak{r}(\mathfrak{x})) \in V'$ und V' ist Vollideal.

Wir können nun rekursiv die höheren Ableitungen von V definieren durch die Festsetzung:

$$V^{(n)} = (V^{(n-1)})'$$

$V^{(n)}$ läßt sich aber auch noch anders charakterisieren, denn es gilt:

$V^{(n)}$ ist die Menge aller Polynome $f(\mathfrak{x}) \in V$, deren sämtliche partielle Ableitungen von einer Ordnung $\leqq n$ in V enthalten sind.

Beweis: Durch vollständige Induktion. Für V' ist die Behauptung richtig, wir nehmen also an, sie sei für $V^{(n)}$ schon bewiesen. Mit U bezeichnen wir die Menge aller Polynome $f(\mathfrak{x}) \in V$, deren sämtliche partielle Ableitungen von einer Ordnung $\leqq n+1$ in V enthalten sind. Wenn nun $f(\mathfrak{x}) \in U$, dann gilt nach Induktionsannahme $f(\mathfrak{x}) \in V^{(n)}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in V^{(n)}$ für $i = 1, 2 \ldots k$, also haben wir $U \subseteqq (V^{(n)})' = V^{(n+1)}$. Wenn aber umgekehrt gilt $f(\mathfrak{x}) \in V^{(n+1)} = (V^{(n)})'$, so folgt daraus nach Induktionsannahme ersichtlich $f(\mathfrak{x}) \in U$, also gilt auch $V^{(n+1)} \subseteqq U$, die Behauptung ist also auch für $n+1$ richtig.

Weiter beweisen wir

Satz 7: Sämtliche Ableitungen $V^{(n)}$ von V haben dasselbe Umschließungsideal wie V.

Denn sei $\mathfrak{v}$ das Umschließungsideal von V. Dann gilt einerseits $V' \subseteqq V \subseteqq \{\mathfrak{v}\}$. Andererseits aber gilt $v \in V$ und $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in V$ für jedes $v \in \mathfrak{v}$, also haben wir $\mathfrak{v} \in V'$ und damit $(\mathfrak{v}) \subseteqq V'$. Deshalb ist $\mathfrak{v}$ Umschließungsideal von V' und damit auch von $V^{(n)}$.

Über die Ableitungen von V wollen wir nun einige einfache Aussagen formulieren:

1. Der Durchschnitt $D = V \cap V' \cap V'' \cap \ldots$ sämtlicher Ableitungen von V ist ein Vollideal mit dem selben Umschließungsideal wie V, das mit seiner Ableitung übereinstimmt.

Die erste Aussage ergibt sich aus Satz 1 und Satz 7. Ersichtlich ist D die Menge aller der Polynome von V, deren sämtliche partiellen Ableitungen in V liegen; hat aber $f(\mathfrak{x})$ diese Eigenschaft, dann hat sie auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, also gilt $D' \supseteqq D$, wegen der stets bestehenden Beziehung $D' \subseteqq D$ ist also die Behauptung richtig.

2. Sind V und W zwei Vollideale, dann gilt:

$$(V \cap W)' = V' \cap W'.$$

Beweis: Zunächst folgt für Vollideale A, B aus $A \subseteqq B$ ersichtlich ganz allgemein $A' \subseteqq B'$, deshalb gilt $(V \cap W)' \subseteqq V' \cap W'$. Andererseits folgt aus $f(\mathfrak{x}) \in V' \cap W'$, daß gilt

$$f(\mathfrak{x}) \in V \qquad f(\mathfrak{x}) \in W \qquad \text{also } f(\mathfrak{x}) \in V \cap W$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in V \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} \in W \qquad \text{also } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in V \cap W$$

also haben wir $f(\mathfrak{x}) \in (V \cap W)'$, also $V' \cap W' \subseteqq (V \cap W)'$.

3. Setzt man $V^{(0)} = V$, so gilt für alle $n \geqq 1$ die Beziehung:

$$V^n \subseteqq V^{(n-1)}$$

Beweis: Sei $n \geqq 2$ und $f(\mathfrak{x}) \in V^n$, dann gilt

$$f(\mathfrak{x}) = \Sigma\, v_1(\mathfrak{x})\, v_2(\mathfrak{x}) \ldots v_n(\mathfrak{x})$$

wobei die $v_\nu(\mathfrak{x})$ Polynome aus V sind. Daraus erkennt man sogleich, daß gilt $f(\mathfrak{x}) \in V$ und daß sämtliche partiellen Ableitungen von $f(\mathfrak{x})$ von einer Ordnung $\leqq n-1$ in V enthalten sind, also gilt $f(\mathfrak{x}) \in V^{(n-1)}$.

Als Beispiel für die Berechnung der Ableitung eines Vollideales betrachten wir im Polynomring $\mathfrak{g}[x]$ über den Ring der ganzen rationalen Zahlen für eine beliebige Primzahl p das Vollideal $V = ((x^{p^n} - x)^m, p)$ mit $m > 0$, $n > 0$. Jedes Polynom $f(x) \in V$ hat die Gestalt

$$f(x) = (x^{p^n} - x)^m\, u(x) + p\, v(x)$$

daher gilt

$$f'(x) = m(x^{p^n} - x)^{m-1}\, [p^n\, x^{p^n-1} - 1]\, u(x) + (x^{p^n} - x)^m\, u'(x) + p\, v'(x)$$

also gilt

$$f'(x) \equiv -\, m(x^{p^n} - x)^{m-1}\, u(x) \mod V.$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß $f(x) \in V'$, ist also das Erfülltsein der Bedingung

$$m(x^{p^n} - x)^{m-1}\, u(x) \equiv 0 \mod V$$

Für $m \equiv 0 \bmod p$ ist dies stets erfüllt. Wenn aber $m \not\equiv 0 \bmod p$ gilt, dann multiplizieren wir mit einem q, welches $mq \equiv 1 \bmod p$ erfüllt und erhalten als notwendige und hinreichende Bedingung jetzt also

$$(x^{p^n} - x)^{m-1}\, u(x) = (x^{p^n} - x)^m\, a(x) + p\, b(x)$$

oder

$$(x^{p^n} - x)^{m-1}\, (u(x) - (x^{p^n} - x)\, a(x)) = p\, b(x)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$u(x) = (x^{p^n} - x)\, a(x) + p\, c(x)$$

Durch Einsetzen in $f(x)$ ergibt sich daraus

$$f(x) = (x^{p^n} - x)^{m+1}\, a(x) + p\, v(x)$$

als notwendige und hinreichende Bedingung für $f(x) \in V'$. Also haben wir:

$$((x^{p^n} - x)^m, p)' = \begin{cases} ((x^{p^n} - x)^m, p) \text{ für } m \equiv 0 \bmod p \\ ((x^{p^n} - x)^{m+1}, p) \text{ für } m \not\equiv 0 \bmod p. \end{cases}$$

Literatur

[1] *Milgram A. N.*: Saturated Polynomials. Reports Math. Colloquium (2) **7**, 65—67 (1946).

[2] *Nöbauer W.*: Über die Operation des Einsetzens in Polynomringen. Math. Annalen **134**, 248—259 (1958).

[3] *Nöbauer W.*: Die Operation des Einsetzens bei Polynomen in mehreren Unbestimmten. J. reine angew. Math. **201**, 207—220 (1959).

Zur Realisierbarkeit der Darstellungen der 3-dimensionalen Drehgruppe

Von

Folker Engelmann, München

(Eingegangen am 15. Juli 1959)

Die Frage, für welche der irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}^t$ der 3-dimensionalen Drehgruppe eine äquivalente *reelle* Form, d. h. ein äquivalentes Matrizensystem mit reellen Elementen existiert, läßt sich folgendermaßen beantworten:

Für alle eindeutigen Darstellungen $\mathfrak{D}^t$ (t = ganzzahlig) der 3-dimensionalen Drehgruppe lassen sich äquivalente reelle Formen auf unendlich viele Weisen finden. Für alle zweideutigen Darstellungen $\mathfrak{D}^t$ (t = halbzahlig) dagegen existiert keine äquivalente reelle Form.

Der *Beweis* dieses Satzes läßt sich in einfacher Weise führen. Es sei zunächst B ein zu irgendeiner Darstellung einer ganz beliebigen Gruppe äquivalentes Matrizensystem, nach dem sich ein System $\mathfrak{V}$ von Basiselementen transformiert, so daß also

$$\mathfrak{V}' = B\,\mathfrak{V} \tag{1}$$

gilt. Man sieht nun unmittelbar, daß das Matrizensystem B dann und nur dann reell ist, wenn sich die Basis $\mathfrak{V}$ und die zu ihr konjugiert komplexe Basis $\overline{\mathfrak{V}}$ gleich transformieren, wenn also auch

$$\overline{\mathfrak{V}}' = \overline{B}\,\overline{\mathfrak{V}} = B\,\overline{\mathfrak{V}} \tag{2}$$

gilt[1]. Die Frage nach der Existenz einer reellen Form einer Gruppendarstellung läßt sich somit durch die Frage nach dem Vorhandensein eines sich äquivalent zu dieser Darstellung transformierenden Basissystems ersetzen, dessen Transformationsverhalten mit dem des konjugiert komplexen Basissystems übereinstimmt. Kennt man im besonderen ein Basissystem $\mathfrak{U}$, das sich äquivalent zu der zu untersuchenden

[1] In diesem Falle existieren dann auch wesentlich reelle Basissysteme, z. B. $\mathfrak{V}_r = \mathfrak{Re}\,(\mathfrak{V}) = {}^1/_2\,(\mathfrak{V} + \overline{\mathfrak{V}})$, so daß eine rein reelle Formulierung möglich wird.

Gruppendarstellung transformiert, so reduziert sich das Problem auf die Frage nach der Existenz einer nicht-singulären Matrix P, so daß sich nach der Ähnlichkeitstransformation

$$\mathfrak{V} = P\,\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{V}' = P\,\mathfrak{U}' \tag{3}$$

$\mathfrak{V}$ und $\overline{\mathfrak{V}} = \overline{P}\,\overline{\mathfrak{U}}$ gleich transformieren; denn das Transformationsverhalten der Basissysteme $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ ist wegen der Einführung von $\mathfrak{V}$ durch (3) äquivalent.

Speziell für die Darstellung $\mathfrak{D}^t$ der 3-dimensionalen Drehgruppe hat man in

$$\mathfrak{U} = (U_\varrho) = (u_1^{n-\varrho}\, u_2^{\varrho-1}) \text{ mit } \varrho = 1, 2, \ldots, n = 2t+1 \tag{4}$$

ein sich äquivalent transformierendes Basissystem, wenn (u_1, u_2) eine sich nach der zu $\mathfrak{D}^{1/2}$ äquivalenten, 2-dimensionalen unitären Gruppe transformierende Basis ist[2]. Da sich die zu (u_1, u_2) konjugiert komplexe Basis $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ wie $(u_2, -u_1)$ transformiert[3], haben auch

$$\overline{\mathfrak{U}} = (\bar{u}_1^{n-\varrho}\, \bar{u}_2^{\varrho-1}) \tag{5a}$$

und

$$\mathfrak{W} = (W_\varrho) = ((-1)^{\varrho-1}\, u_2^{n-\varrho}\, u^{\varrho-1}) = ((-1)^{\varrho-1}\, U_{n+1-\varrho}) \tag{5b}$$

gleiches Transformationsverhalten. Soll sich nun eine durch eine Ähnlichkeitstransformation (3) aus $\mathfrak{U}$ hervorgehende Basis $\mathfrak{V}$ wie ihre konjugiert komplexe Basis $\overline{\mathfrak{V}}$ transformieren, so muß

$$\mathfrak{V} = P\,\mathfrak{U} = k\,\overline{P}\,\mathfrak{W} \tag{6}$$

gelten, wobei k einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Denn da sich $\overline{\mathfrak{U}}$ und $\mathfrak{W}$ gleich transformieren, gilt dies auch für $\overline{\mathfrak{V}} = \overline{P}\,\overline{\mathfrak{U}}$ und $\overline{P}\,\mathfrak{W}$, so daß sich nun auch $\mathfrak{V}$ und $\overline{P}\,\mathfrak{W}$ gleich, und zwar nach einem zu der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}^t$ äquivalenten Matrizensystem transformieren müssen. Andererseits geht aber wegen (3) und (5b) $\overline{P}\,\mathfrak{W}$ aus $\mathfrak{V}$ durch eine Ähnlichkeitstransformation hervor, so daß aus dem *Schur*schen Lemma[4] die in (6) behauptete Proportionalität zu folgern ist.

Gleichung (6) lautet mit (5b) und der Bezeichnung $p_{\sigma,\varrho}$ für die Elemente der Matrix P in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} p_{\sigma,\varrho}\, U_\varrho = k\,\bar{p}_{\sigma,\tau}\, W_\tau &= k\,\bar{p}_{\sigma,\tau}\,(-1)^{\tau-1}\, U_{n+1-\tau} \\ &= k\,\bar{p}_{\sigma,n+1-\varrho}\,(1-)^{n-\varrho}\, U_\varrho, \end{aligned} \tag{7}$$

[2] Siehe z. B.: *v. d. Waerden, B. L.*: Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, S. 61 f., 67, Berlin 1932.

[3] Siehe z. B.: *v. d. Waerden, B. L.*: l. c. S. 58.

[4] Siehe z. B. *Boerner, H.*: Darstellungen von Gruppen, S. 21, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

so daß sich durch Koeffizientenvergleich

$$p_{\sigma,\varrho} = (-1)^{n-\varrho}\, k\, \bar{p}_{\sigma,n+1-\varrho} \tag{8a}$$

ergibt, was sich mit $\varrho \to n+1-\varrho$ auch als

$$p_{\sigma,n+1-\varrho} = (-1)^{\varrho-1}\, k\, \bar{p}_{\sigma,\varrho} \tag{8b}$$

schreiben läßt. Durch Kombination dieser beiden Formen folgt direkt

$$p_{\sigma,\varrho}\,(1 + (-1)^n\, k\, \bar{k}) = 0. \tag{9}$$

Man hat nun zwei Fälle zu unterscheiden:

a) n = gerade, also t = halbzahlig (*zweideutige* Darstellungen der 3-dimensionalen Drehgruppe).

Da $1 + k\,\bar{k} \geqq 1$ ist, liefert (9) für diesen Fall unmittelbar

$$\text{alle } p_{\sigma,\varrho} = 0, \text{ also } P = 0. \tag{10}$$

Es gibt hier also keine Basis, die sich wie die zu ihr konjugiert komplexe Basis transformiert, so daß eine *reelle* Form für die zu den *zweideutigen* Darstellungen der 3-dimensionalen Drehgruppe äquivalenten Matrizensysteme *nicht existieren* kann.

b) n = ungerade, also t = ganzzahlig (*eindeutige* Darstellungen der 3-dimensionalen Drehgruppe).

In diesem Fall läßt sich (9) allgemein durch

$$k\,\bar{k} = 1 \tag{11}$$

erfüllen. Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (8) ist dann z. B. durch

$$p_{\sigma,\varrho} = \begin{cases} \text{beliebig} & \text{für } \varrho = 1, 2, \ldots, \dfrac{n-1}{2} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, k\, \bar{p}_{\sigma,\varrho} & \text{für } \varrho = \dfrac{n+1}{2} \\ (-1)^{n-\varrho}\, k\, \bar{p}_{\sigma,n+1-\varrho} & \text{für } \varrho = \dfrac{n+3}{2}, \ldots, n = 2t+1 \end{cases} \tag{12}$$

mit der Einschränkung (11) für k gegeben. Eine solche Matrix P ist im allgemeinen nicht singulär. Mit ihrer Hilfe ist gemäß (3) ein Basissystem $\mathfrak{B}$ angebbar, das sich wegen der Gültigkeit von (6) wie $\bar{P}\,\mathfrak{B}$, also auch wie $\bar{\mathfrak{B}}$ transformiert. Damit *existiert* also für die *eindeutigen* Darstellungen der 3-dimensionalen Drehgruppe eine äquivalente *reelle* Form. Da P durch (12) nicht eindeutig bestimmt ist, ist diese reelle Form selbst nicht eindeutig angebbar. Man erhält vielmehr unendlich

viele solche Formen, da mit einer bestimmten Matrix P auch alle möglichen, aus ihr durch Ähnlichkeitstransformation mit reellen, nichtsingulären $n \times n$-Matrizen entstehenden Matrizen zu einer sich reell transformierenden Basis führen. Eine spezielle Form der eindeutigen Darstellungen der 3-dimensionalen Drehgruppe sind z. B. die Transformationsmatrizen der reellen Kugelflächenfunktionen $P_t^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi$ und $P_t^m(\cos\vartheta)\sin m\varphi$ $(m = 0, 1, \ldots, t)$.

Damit ist der eingangs formulierte Satz bewiesen.

Herrn Dr. *E. Fick* danke ich für Diskussionen.

Buchbesprechungen

Gesammelte Arbeiten. Von *A. Haar*. Im Auftrag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von *B. Szökefalvi-Nagy*. In deutscher und ungarischer Sprache. 660 S. Budapest: Verlag der Akademie der Wissenschaften. 1959. Geb. $ 14.—.

Mit der Herausgabe der Arbeiten von *Alfred Haar* (1885—1933) durch die Ungarische Akademie der Wissenschaften ist nunmehr das gesamte Lebenswerk *Haars* der Fachwelt leicht zugänglich gemacht. Der stattliche Band, der von *Béla Szökefalvi-Nagy* redigiert wurde, beginnt mit einem kurzen Lebenslauf von *Haar* und bringt dann seine Arbeiten in folgender Gruppierung: Mengenlehre, Orthogonale Funktionenreihen und singuläre Integrale, Analytische Funktionen, Partielle Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Approximationen von Funktionen und lineare Ungleichungen, Diskrete Gruppen und Funktionenalgebren, Kontinuierliche Gruppen. Vor allem seine letzte Arbeit über kontinuierliche Gruppen hat auf die neueste Entwicklung der Mathematik einen allgemein anerkannten Einfluß ausgeübt, ohne daß es dem zu früh verstorbenen Verfasser gegönnt gewesen wäre, selbst an deren Ausbeute teilzunehmen. Die Arbeiten sind in ungarischer oder deutscher Sprache geschrieben, und im ersten Falle ist eine deutsche Übersetzung als Anhang beigefügt.

K. Mayrhofer, Wien

Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers. Teil I: Der Briefwechsel *L. Eulers* mit *G. F. Müller* 1735 bis 1767. Herausgegeben und eingeleitet von *A. P. Juskevic* und *E. Winter* unter Mitwirkung von *P. Hoffmann*. (Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Quellen und Studien zur Geschichte Osteuropas: Band III.) VIII, 327 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1959.

Wer die Geschichte der Entwicklung des wissenschaftlichen Lebens nicht nur aus farblosen, zusammenfassenden Darstellungen nachstudieren will, sondern miterleben möchte, der wird an der Lektüre dieses Briefwechsels zwischen *Euler* und dem aus Westfalen stammenden Geographen und Historiker, in Rußland teils als Sekretär der Petersburger Akademie, teils an der neu errichteten Universität in Moskau wirkenden Professor *Müller* viel Anregung finden.

Der Briefwechsel umfaßt die Zeit von 1735 bis 1767, also *Eulers* Berliner Zeit und die ersten Jahre nach seiner Rückkehr nach Petersburg. Es ist bekannt, daß *Euler* während seines Berliner Aufenthaltes ständig auch eine Pension von der Petersburger Akademie erhielt. Dies war aber keineswegs nur eine Ehrengabe, sondern ein Entgelt für eine sehr intensive und äußerst gewissenhaft durchgeführte organisatorische Tätigkeit, Beratung in Personalfragen, Beschaffung von Büchern und Instrumenten. Die Personalfragen betrafen nicht nur Berufungsangelegenheiten, sondern auch z. B. die Bestellung von Glasschleifern und Ähnliches.

In wissenschaftlicher Beziehung erfahren wir viel über die zahlreichen theoretischen und praktischen Arbeiten *Eulers* und seiner Zeitgenossen über

geometrische Optik (hauptsächlich Beseitigung des Farbfehlers). Ferner erfahren wir viel über sein persönliches Verhältnis zu *d'Alembert*, das sich im Lauf der Zeit von äußerst gehässiger Feindschaft in ein fast freundschaftliches verwandelte. Vor allem aber ist dieses Buch auch lesenswert wegen der sehr interessanten Einleitung und wegen der sehr aufschlußreichen Kommentare zu den einzelnen Briefen.

P. Funk, Wien

Logic in Elementary Mathematics. Von *R. M. Exner* und *M. F. Roßkopf*. Mit 25 Textabb., XI, 274 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Co. 1959. 52s. 6d.

In diesem Buch wird das Grundgerüst der symbolischen Logik in sehr ausführlicher und breiter Form entwickelt; es werden sowohl der Aussagenkalkül als auch der engere Prädikatenkalkül behandelt. Die Theorie wird an vielen Beispielen erläutert und durch zahlreiche leichte Übungsaufgaben ergänzt. Darüber hinaus verfolgt das Buch den Zweck, sichtbar zu machen, welche Bedeutung die formale Logik für die Mathematik hat; es werden daher einige elementare mathematische Ableitungen mit Hilfe des Logikkalküls durchgeführt, so werden z. B. die Anfangsgründe der Theorie der abelschen Gruppen und der Körpertheorie entwickelt oder eine endliche Geometrie aus 10 Punkten und 10 Geraden studiert. In einem eigenen Kapitel werden die verschiedenen Arten von mathematischen Beweisen vom logischen Standpunkt aus untersucht.

Das originelle Buch zeigt jedenfalls, daß es durchaus möglich ist, auf einer etwa unseren beiden letzten Mittelschulklassen entsprechenden Stufe des Mathematikunterrichtes symbolische Logik zu lehren, und ist als Grundlage für einen derartigen Lehrgang sehr geeignet.

W. Nöbauer, Wien

The Foundations of Mathematics. A Study in the Philosophy of Science. Von *E. W. Beth*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) Mit 19 Textabb., XXVI, 741 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Co. 1959. hfl. 50.—.

In diesem großangelegten Werk gibt der Verfasser nicht nur eine ausführliche Darstellung der wesentlichen Probleme, Methoden und Ergebnisse in der Forschung über die Grundlagen der Mathematik, sondern untersucht auch eingehend die mit dieser Grundlagenforschung in Zusammenhang stehenden philosophischen Fragen; dabei kann er teilweise auf seine zahlreichen früher erschienenen Bücher und Abhandlungen zurückgreifen. Sämtliche in dem Buch behandelten Gegenstände werden eingehend und klar dargestellt; sehr begrüßenswert sind die zahlreichen historischen Bemerkungen, durch die der Leser auch die gesamte Geschichte der mathematischen Grundlagenforschung kennenlernt.

Der erste Teil des Buches schildert die historische Entwicklung jener Gebiete der Philosophie, welche für die Untersuchung der Grundlagen der Mathematik von Bedeutung sind, vor allem also der Wissenschaftslehre und der Logik. Im Hinblick auf die mathematische Grundlagenforschung vertritt der Verfasser dabei folgenden Standpunkt: Die auf diesem Gebiet bestehenden Meinungsverschiedenheiten haben ihren Ursprung hauptsächlich darin, daß die aristotelische Wissenschaftslehre den Erfordernissen des hier erreichten Standes der Forschung nicht entspricht. Der zweite Teil erläutert die axiomatische Behandlung mathematischer Theorien zunächst allgemein und führt sie dann an mehreren Beispielen vor, von denen wir nur die *Dedekind*sche Theorie der natürlichen Zahlen erwähnen wollen. Im dritten Teil wird diese axiomatische

Behandlung formalisiert. Dies macht natürlich einen Abriß der symbolischen Logik erforderlich, auf den eine Darstellung der *Hilbert*schen Beweistheorie folgt. Der vierte Teil behandelt die Syntax und die Semantik. Im fünften Teil werden die verschiedenen Theorien über die Existenz der mathematischen Größen auseinandergesetzt: Logizismus, Cantorismus (die *Cantors* Mengenlehre zugrunde liegende Auffassung), Intuitionismus, Nominalismus. Der sechste Teil handelt von den Paradoxien. Der siebte Teil zeigt die Anwendung von mengentheoretischen und topologischen Methoden in der Metamathematik, worauf im achten Teil auf die wichtigsten bekannten Resultate zum Entscheidungsproblem kurz eingegangen wird. Der letzte Teil beschäftigt sich wiederum mit der philosophischen Seite der Grundlagenforschung.

Wir sind überzeugt davon, daß der Verfasser mit diesem Buch einen bedeutsamen Beitrag zur Weiterentwicklung und Vereinheitlichung der mathematischen Grundlagenforschung geleistet hat. *W. Nöbauer*, Wien

The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics. Proceedings of an International Symposium held at the University of California, Berkeley, December 26, 1957 — January 4, 1958. Herausgegeben von *L. Henkin, P. Suppes* und *A. Tarski*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) XI, 488 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Co. 1959. hfl. 45.—.

Die auf dem Gebiet der Geometrie schon in der Antike verwendete axiomatische Methode hat in den letzten hundert Jahren in die meisten Zweige der Mathematik Eingang gefunden und beginnt nun auch in den Naturwissenschaften Fuß zu fassen. An den Referaten des vorliegenden Sammelbandes kann man die Anwendung dieser Methode auf zwei ganz verschiedenen Bereichen verfolgen: Einerseits in der Geometrie, wo die Axiomatisierung schon zu hoher Vollendung gediehen ist, andererseits in der Physik, wo sie noch in den Kinderschuhen steckt. Neben den 14 Referaten aus dem Gebiet der Geometrie und den 14 Referaten aus dem Gebiet der Physik enthält der Band noch 5 weitere Referate, von denen eines die Axiomatisierung der Genetik behandelt, eines die Bedeutung der axiomatischen Methode im Unterricht bespricht, während in den übrigen wissenschaftstheoretische Untersuchungen über Axiomensysteme vorgenommen werden. *W. Nöbauer*, Wien

The Philosophy of Space and Time. Von *H. Reichenbach*. Englische Übersetzung von *M. Reichenbach* und *J. Freund* mit einführenden Bemerkungen von *R. Carnap*. Mit 49 Textabb., XVI, 295 S. New York: Dover Publications. 1958. $ 2.—.

Als *Reichenbachs* „Philosophie der Raum-Zeit-Lehre" im Jahre 1928 erschien, war die logische und erkenntnistheoretische Fundierung der Relativitätstheorie im wesentlichen abgeschlossen, und das Buch brachte die erste umfassende und systematische Darstellung der Ergebnisse dieser Fundierung. Da sich an der Gestalt der Relativitätstheorie seither kaum etwas geändert hat, ist der Inhalt des Buches, von dem wir insbesondere die Untersuchungen über die erkenntnistheoretische Stellung der Geometrie hervorheben möchten, auch heute noch durchaus aktuell, und wer eine gut verständliche, wenig mathematische Vorkenntnisse erfordernde Einführung in die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie wünscht, wird gerne nach dem Buch greifen. Für die vorliegende englische Übersetzung hat *R. Carnap* ein Vorwort geschrieben, in dem die Bedeutung des Buches vom gegenwärtigen Standpunkt aus gewürdigt wird. *W. Nöbauer*, Wien

Applications of the Theory of Matrices. Von *F. R. Gantmacher*. Englische Übersetzung aus dem Russischen von *J. L. Brenner* unter Mitwirkung von *D. W. Bushaw* und *S. Evanusa*. IX, 317 S. New York-London: Interscience Publishers. 1959. $ 9.—.

Von *Gantmachers* ausgezeichnetem Werk über Matrizenrechnung ist kürzlich eine deutsche Übersetzung in zwei Teilen erschienen; deren zweiter Teil enthält die Kapitel XI bis XV des Originals, in welchen Anwendungen der Matrizenrechnung behandelt werden (Besprechung in Monatsh. Math., Band **64**, Seite 84 (1960)). Auch das vorliegende Buch besteht im wesentlichen aus einer Übersetzung dieser Kapitel; zur Abrundung sind weitere Fußnoten und ein kurzer Angang hinzugefügt worden.

W. Nöbauer, Wien

Elementare und klassische Algebra. Band II. Von *W. Krull*. (Sammlung Göschen: Band 933.) 132 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1959. Brosch. DM 3.60.

Mit dem vorliegenden Bändchen bringt der Verfasser seine Darstellung der Hauptresultate der „klassischen Algebra", das heißt, der Theorie der algebraischen Gleichungen und der Erweiterungen kommutativer Körper, zum Abschluß. Inhaltlich auf den ersten Teil aufbauend (Besprechung in Monatsh. Math. **56**, Seite 352, 1952) entwickelt er die Galoissche Theorie in voller Allgemeinheit und demonstriert ihre Anwendungen an Problemen der Gleichungs- und Körpertheorie. Besonders bei den Anwendungen bringt er dabei viele Dinge, welche in den übrigen modernen Lehrbüchern der Algebra nicht enthalten sind — wir erwähnen nur die Sätze über Normalkörper mit vorgegebener Galoisgruppe oder die Untersuchungen über reelle Radikalkörper. Die Darstellung ist ziemlich knapp — bei der Fülle des behandelten Stoffes wäre dies nicht anders möglich; leider weicht der Verfasser manchmal von der heute üblichen Terminologie und Bezeichnungsweise ab (z. B. schreibt er invariante Untergruppe statt Normalteiler).

Der Band besteht aus folgenden Abschnitten: I Gruppentheorie, insbesondere Theorie der Abbildungsgruppen. II Galoissche Theorie. Reintranszendente Körper. III Berechnungsprobleme und Homomorphiesätze. IV Affine und projektive Darstellungen. Gleichungen 5. und 6. Grades. V Bizyklische Gruppen und reelle Radikalkörper.

Vielleicht trägt das inhaltsreiche Buch dazu bei, neues Interesse für ein heute etwas aus der Mode gekommenes Teilgebiet der Algebra wachzurufen.

W. Nöbauer, Wien

Algebra. 2. Teil Von *B.. L. van der Waerden*. Unter Benutzung von Vorlesungen von *E. Artin* und *E. Noether*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 34.) Vierte Auflage der Modernen Algebra. X, 275 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Geb. DM 29.60.

Die ersten drei Auflagen wurden in dieser Zeitschrift Mh. Math. **40**, 3 (1933), **49**, 21 (1941) und **60**, 171 (1956) besprochen. Diesmals wurden größere Änderungen vorgenommen. Die Eliminationstheorie wurde weggelassen, aber zwei neue Kapitel sind hinzugekommen, eines über algebraische Funktionen einer Variablen und eines über topologische Algebra. Das erste Kapitel bringt den *Riemann-Roch*schen Satz für beliebige Konstantenkörper nach der Methode von *A. Weil*. Die topologische Algebra handelt von Gruppen, Ringen und Schiefkörpern,

die gleichzeitig topologische Räume sind und bei denen die algebraischen Operationen im Sinne der Topologie stetig sind. Es werden zunächst die Grundbegriffe erörtert und dann die Komplettierung von Gruppen, Ringen und Schiefkörpern und die Theorie der bikompakten Schiefkörper behandelt. In den übrigen Kapiteln wurden Ergänzungen gegeben und manches neu dargestellt.

N. Hofreiter, Wien

Algebraic Theories. (Früher: Modern Algebraic Theories.) Von *L. E. Dickson.* (Dover Books on Mathematics.) Mit 3 Textabb., IX, 276 S. New York: Dover Publications. 1959. $ 1.50.

Es handelt sich hier um einen unveränderten Neudruck der aus dem Jahre 1926 stammenden ersten Auflage des Buches, die 1929 unter dem Titel „Höhere Algebra" auch in deutscher Sprache erschienen ist (Besprechung in Monatsh. Math. **37**, Seite 9 (1930)). Das Werk wird auch heute noch als Einführung in die darin behandelten Teilgebiete der Algebra gute Dienste leisten.

W. Nöbauer, Wien

Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra. Von *E. P. Wigner.* Aus dem Deutschen übersetzt von *J. J. Griffin.* (Pure and Applied Physics: Band 5.) Mit 15 Textabb., XI. 372 S. New York-London: Academic Press. 1959. $ 8.80.

Das im Jahre 1931 unter dem Titel „Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren" erschienene deutsche Original dieses Buches — welches in Monatsh. Math.. Bd. **39**, Seite 51, eingehend besprochen wurde — hat als eine der ersten ausführlichen Darstellungen in Buchform der kurz zuvor entdeckten gruppentheoretischen Behandlung von Problemen der Quantentheorie vielen Physikern und Mathematikern zur Einführung in dieses Gebiet ausgezeichnete Dienste geleistet. Die vorliegende englische Übersetzung wurde gegenüber dem Original um drei Kapitel erweitert, von denen eines die *Racah*-Koeffizienten, eines die Zeitumkehr und eines die physikalische Deutung der Darstellungskoeffizienten und der *Racah*-Koeffizienten behandelt.

W. Nöbauer, Wien

Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie. Von *L.-K. Hua.* (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften: Band I: Algebra und Zahlentheorie, 2. Teil, D. Analytische Zahlentheorie, Heft 13, Teil I.) Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. 123 S. Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1959. Geh. DM 13.—.

Der vorliegende Enzyklopädiebericht behandelt nicht nur die im Titel genannten Dinge, sondern gibt auch einen Überblick über Ergebnisse und Beweismethoden vieler verwandter Gebiete. Inhalt: Elementare Methoden. Abschätzungen von Exponentialsummen, Primzahlverteilung. Das *Waring*sche Problem. Das *Goldbach*sche Problem. Gleichverteilung. Weitere zahlentheoretische Funktionen. Wie man sieht, enthält das Buch fast die gesamte analytische Zahlentheorie. Dieses riesige Gebiet in etwas über 100 Seiten zusammenzudrängen, wurde nur durch die meisterhafte Darstellungsart des Verfassers ermöglicht. Die Skizzen der wichtigsten Methoden werden so übersichtlich und klar dargestellt und die Grundideen so prägnant herausgearbeitet, daß man sich oft

wundert, wie einfach viele Dinge sind, die man von anderen Darstellungen her als kompliziert und schwierig in Erinnerung hat. Es ist ein Werk aus einem Guß, das in keiner mathematischen Bücherei fehlen sollte. *K. Prachar*, Wien

Mathematical Analysis. Von *E. M. Hemmerling*. Mit 100 Textabb., XI, 332 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Co. 1959. 45 s.

Das Buch bringt vieles aus der Algebra, Geometrie und Analysis, was man an österreichischen Mittelschulen lehrt, und geht etwas darüber hinaus. Es ist somit ein Lehrbuch für solche, die in der Elementarmathematik keine sicheren Kenntnisse haben, aber später eine Einführung in die höhere Mathematik an technischen Hochschulen brauchen. Die Darstellung ist ausführlich und leicht verständlich. Jedes Kapitel bringt zahlreiche Aufgaben samt Lösungen.
N. Hofreiter, Wien

Elements of Calculus and Analytic Geometry. Von *G. B. Thomas, Jr.* (Addison-Wesley Science Education Series.) Mit 316 Textabb., X, 580 S. Reading (Mass.) — London: Addison-Wesley Publishing Co. 1959. $ 7.50; 75/s.

Das Buch enthält die Differential- und Integralrechnung für Funktionen in einer Variablen und die Analytische Geometrie in der Ebene. Als Vorkenntnisse genügen Algebra und Trigonometrie aus der Elementarmathematik. Der Verfasser bemüht sich mit Erfolg, alle Begriffe und Sätze plausibel zu machen und ein gewisses Verständnis der Theorie zu erreichen. Durch die Tausende von Beispielen und Aufgaben gelingt es ihm auch, daß seine Leser die obigen Disziplinen routinemäßig beherrschen. Viel Wert wird auf Anwendungen gelegt, und so paßt das Buch besonders für jene, die Mathematik als Hilfswissenschaft studieren. *N. Hofreiter*, Wien

Continuity and Number. Von *B. Goussinsky*. 31 S. Author's edition. Tel Aviv. 1959. $ 0.50.

Diese Studie über das System der reellen Zahlen ist ohne entsprechende Vorkenntnisse geschrieben und führt zu absurden Ergebnissen.
W. Nöbauer, Wien

Trigonometric Series. Band I und II. Von *A. Zygmund*. Zweite Auflage. XII, 383 + VII, 354 S. Cambridge: At the University Press. 1959. Geb. 84/— pro Band.

Vor längerer Zeit teilte mir ein befreundeter Mathematiker mit, daß der Autor an einer Neuauflage des bekannten Standardwerkes über Trigonometrische Reihen arbeite, und fügte hinzu, daß auch diese Neuauflage die meisten Arbeiten über diesen Gegenstand vorwegnehmen werde, die in den nächsten zehn Jahren geschrieben werden.

Modifiziert man dieses Scherzwort zu der Feststellung, daß auch dieses Werk für die Forschung in der klassischen Theorie der Trigonometrischen Reihen wegweisend sein werde, dann trifft es wohl das Richtige. Obwohl in der vorliegenden Auflage die Grundkonzeption der ersten Auflage erkennbar ist, ist doch mehr oder weniger ein neues Werk geschaffen worden, was auch rein äußerlich darin zum Ausdruck kommt, daß an Stelle eines Bandes nunmehr ein umfangreiches zweibändiges Werk vorliegt.

Diese Erweiterung ergibt sich einerseits aus der Einarbeitung der Literatur der letzten zwanzig Jahre in den Bestand der ersten Auflage und andererseits aus der Hinzufügung ganz neuer Kapitel. Wir erwähnen: Trigonometrische Interpolation, Differentiation von Reihen, Interpolation bei linearen Operationen, Mehrfache Fourierreihen.

Alle diese Gebiete hat der Verfasser in den letzten Jahren durch eigene Arbeiten wesentlich gefördert. Jeder Mathematiker wird das Buch mit Genuß lesen und die Schönheit spüren, welche von den Methoden der klassischen Analysis ausgeht. *L. Schmetterer*, Hamburg

Funkcje Rzeczywiste. Band II. Von *R. Sikorski.* (Monografie Matematyczne: Band 37.) 262 S. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1959. zl. 35.—.

Der nunmehr erschienene zweite Band dieses Werkes über reelle Funktionen beginnt mit einem Kapitel über Funktionenräume (insbesondere *Banach*sche Räume); hier werden auch die linearen Operationen in solchen Räumen genau untersucht, und es findet sich auch einiges über die Distributionen. Nun folgt ein mit „*Hilbert*scher Raum, Orthogonalreihen" überschriebenes Kapitel. Dieses bringt unter anderem den grundlegenden Satz von *Riesz-Fischer* und verschiedene Sätze über Orthogonalreihen, die mit den Namen *Haar*, *Rademacher*, *Kolmogoroff*, *Chintschin*, *Paley*, *Wiener* und anderen verbunden sind. Der zweite Teil des Buches ist den *Fourier*schen Reihen und Integralen gewidmet. Außer Untersuchungen über Konvergenz findet sich hier auch verschiedenes andere, z. B. *Fourier-Stieltjes*-Transformierte, Theorie von *Plancherel*. Zahlreiche interessante Aufgaben bringen Ergänzungen zum Stoff und werden für den Leser besonders nützlich sein.

Gerade auf dem Gebiet der reellen Funktionen ist der Gegensatz zwischen nur einführenden Werken kleineren Umfanges und ganz ausführlichen Spezialwerken besonders groß. Das vorliegende Buch erscheint in hohem Maße geeignet, diesen Gegensatz zu überbrücken. Es ist ohne große Vorkenntnisse verständlich und berücksichtigt klassische und moderne Ergebnisse in gleicher Weise.

K. Prachar, Wien

Elemente der Funktionentheorie. Von *K. Knopp.* (Sammlung Göschen: Band 1109.) Fünfte Auflage. Mit 23 Textabb., 144 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1959. DM 3.60.

Das zur Einführung in die Funktionentheorie äußerst bewährte Buch erscheint bereits in fünfter, im wesentlichen unveränderter Auflage. Die erste Auflage wurde in dieser Zeitschrift: Mh. Math. **45**, 20 (1937) besprochen.

N. Hofreiter, Wien

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. Band II: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. Von *K. Knopp.* (Sammlung Göschen: Band 878.) Fünfte Auflage. 151 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1959. Brosch. DM 3.60.

Da die meisten Lehrbücher über Funktionentheorie wenig Übungsaufgaben enthalten, sind die beiden von *K. Knopp* herausgegebenen Bändchen „Aufgabensammlung zur Funktionentheorie" sehr erwünscht, wie auch die rasche Aufeinanderfolge der Auflagen zeigt. Der zweite Teil bringt Aufgaben über Singularitäten, ganze und meromorphe Funktionen, periodische Funktionen,

mehrdeutige Funktionen, analytische Fortsetzung und konforme Abbildung. Es sind größtenteils reine Übungsaufgaben, deren Lösungen ausführlich angegeben werden. *N. Hofreiter*, Wien

Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales. Band III. Von *L. Robin*. (Collection technique et scientifique du Centre National d'Études des Télécommunications.) Mit 44 Textabb., VIII, 289 S. Paris: Gauthier-Villars. 1959. Brosch. fr. 5500.—; Cart. fr. 6000.—.

Der Schlußband des umfassenden Werkes bringt zunächst (Kapitel VII) verschiedene Additionstheoreme für die *Legendre*schen Funktionen, insbesondere auch die von *R. Lagrange* gefundenen Beziehungen. Dann folgen zahlreiche Untersuchungen über die Nullstellen der Funktionen P_n^m und Q_n^m. Unter „Anwendungen der *Legendre*schen Funktionen auf Rotationsflächen mit anderen als sphärischen Koordinaten" werden behandelt: verlängertes Rotationsellipsoid, abgeplattetes Rotationsellipsoid, Torus, Entwicklungen von Funktionen gewisser Klassen in Reihen von Torusfunktionen erster und zweiter Art. Kegelfunktionen. Das letzte Kapitel behandelt ausführlich die *Gegenbauer*schen Funktionen und die Sphäroidfunktionen. Es ist eine große Fülle von Zusammenhängen, die zwischen den verschiedenen Funktionen bestehen, und an Anwendungen sei nur die Behandlung des *Dirichlet*schen Problems für die verschiedenen Bereiche erwähnt. Besonders sei noch die sehr sorgfältige Diskussion der Funktionen mit komplexen Parameterwerten und der Gültigkeit verschiedener Formeln im Komplexen genannt. Die Literaturangaben und historischen Bemerkungen sind sehr ausführlich (z. B. sind fast hundert Tafelwerke zitiert). Seit dem Erscheinen von *Hobsons* Standardwerk ist wohl kein Buch dieser Art erschienen, und man muß dem Verfasser dankbar dafür sein, daß er sich der großen Mühe unterzogen hat, dieses Kapitel der Theorie der speziellen Funktionen in so ausführlicher Weise zugänglich zu machen. *K. Prachar*, Wien

Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Von *F. Bachmann*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band XCVI.) Mit 160 Textabb., XIII, 311 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. DM 45.80; Gln. DM 49.80.

Dieses Buch ist aus Vorlesungen des Autors in Kiel entstanden und entwirft einen Aufbau der ebenen metrischen Geometrie unter Zugrundelegung des Begriffes der Spiegelung und der durch die Spiegelung erzeugbaren Bewegungsgruppe. In der euklidischen Ebene und den nichteuklidischen Ebenen entsprechen nämlich den Punkten und Geraden in eindeutiger Weise die zentralen bzw. axialen Spiegelungen, also die involutorischen Elemente der Bewegungsgruppe. Geometrischen Aussagen über Punkte und Geraden müssen daher gruppentheoretische Relationen zwischen den zugehörigen Spiegelungen entsprechen. Faßt man nun die Spiegelungen selbst als geometrische Gegenstände auf, so entsteht ein gruppentheoretisches Modell der ebenen metrischen Geometrie, welches aus rein gruppentheoretischen formulierten Axiomen unter Verwendung des gruppentheoretischen Kalküls einen Aufbau der Geometrie ohne Verwendung von Anschauungselementen gestattet. Die geringe Zahl der nötigen Axiome liefert einen sehr allgemeinen Begriff der metrischen Ebene, welche weder stetig noch anordenbar zu sein braucht, in der nicht notwendig freie Beweglichkeit herrscht und die schließlich nur endlich viele Punkte und

Geraden zu besitzen braucht. Als Spezialfall ist die Bolyaische ebene absolute Geometrie enthalten.

Den ersten mehr propädeutischen Kapiteln, die eine elementare Beschreibung der Spiegelungsgeometrie und der metrischen Ebenen liefert, folgt der eigentlich axiomatische Aufbau, welcher in dem Haupttheorem mündet, das die Erweiterung der metrischen Ebenen zu projektiv-metrischen Ebenen und der Bewegungsgruppen metrischer Ebenen zu Bewegungsgruppen projektiv-metrischer Ebenen garantiert. Damit ist der Anschluß zu den Cayley-Kleinschen Modellen geschaffen, die in jeweils eigenem Aufbau getrennt entwickelt werden. Dabei bleibt der Autor keineswegs bei axiomatisch grundlegenden Aussagen stehen, sondern liefert eine beachtliche Fülle geometrisch interessanter Probleme. Weitere Abschnitte sind der algebraischen Darstellung der Bewegungsgruppen gewidmet sowie Beiträgen zum Umkehrproblem des Haupttheorems, wie man aus den projektiv-metrischen Ebenen jene Teilebenen auswählen kann, welche metrisch sind.

Außer der klaren Diktion, dem übersichtlichen Satz sowie den zahlreichen Literaturstellen und den durch Kleindruck hervorgehobenen zusätzlichen Bemerkungen muß auch die sorgfältige Ausführung der zahlreichen Textfiguren besonders gelobt werden. *H. Brauner*, Wien

Theorie der Kongruenzen. Von *S. P. Finikow*. Wissenschaftliche Bearbeitung der deutschen Ausgabe von *G. Bol*. (Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abteilung, Mathematische Monographien: Band X.) Mit 13 Textabb., XV, 491 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1959. Geb. DM 56.—.

Der Akademie-Verlag in Berlin bietet mit der Übersetzung dieses 1950 in russischer Sprache erschienenen Buches eine weitere Monographie der Moskauer Schule der Differentialgeometrie. Das Ziel des Buches, das mit nahezu 250 Literaturangaben versehen ist, liegt einerseits in dem Bestreben, die klassische Theorie der Strahlkongruenzen, wie sie mit den Namen *Darboux*, *Bianchi* und *Kummer* verknüpft ist, in prägnanter Form zu bieten sowie andererseits in die modernen Problemstellungen einzuführen.

Die ersten Kapitel geben einen Überblick über die Kongruenzen in elementarer Darstellung, die Erfassung der Bewegungskomponenten eines Dreibeins im Kalkül der äußeren Formen und die Theorie der quadratischen Grundformen von Kongruenzen im euklidischen Raum. In diesem Abschnitt werden auch die grundlegende metrische Theorie sowie die W-Kongruenzen mit Hilfe der Moutard-Transformationen behandelt. Eine weiterer Buchteil gibt Zusammenhänge mit der Projektivgeometrie. Hier findet sich unter Verwendung eines kanonischen Tetraeders einer Fläche die Fubinische Theorie der W-Kongruenzen und die Theorie der konjugierten Netze im n-dimensionalen projektiven Raum sowie eine Einführung in die Theorie der asymptotischen Flächentransformationen. Die abschließenden Kapitel besprechen die allgemeine Theorie der Kongruenzen im projektiven Raum und ihre Invariantentheorie; weiters werden bemerkenswerte Klassen von Kongruenzen, die in neueren russischen Arbeiten von *Wassiljew* u. a. eine gewisse Bedeutung erlangt haben, besprochen. Den Abschluß bildet die Theorie der Projektivabwicklung einer Strahlkongruenz.

Methodisch stellt dieses in der Reihe Mathematischer Monographien enthaltene Buch eine Meisterleistung dar, die sich einerseits in der Auswahl des Stoffes und in der Prägnanz der Formulierungen, andererseits in der analytischen Eleganz ausdrückt, die aufs Neue die Brauchbarkeit des Cartanschen Kalküls für differentialgeometrische Untersuchungen erweist. Trotz des durch

die Natur der Fragestellungen manchmal bedingten rechnerischen Aufwandes ist eine stets auf den geometrischen Kern bedachte Darstellung dieses zentralen geometrischen Forschungsgebietes entstanden. *H. Brauner*, Wien

Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica. Vol. III. Sviluppo delle teorie degli integrali semplici e multipli sopra una superficie o varietà e delle teorie collegate. Von *F. Severi*. VIII, 463 S. Rom: Edizioni Cremonese. 1959. Lire 4800.—.

Es handelt sich hier um den 3. Band des groß angelegten Werkes, das *Severi* 1942 begonnen hat und in dem er seine Forschungsergebnisse auf dem Gebiete der algebraischen Geometrie zusammenfassend darstellt. Der 2. Band ist vor einem Jahr erschienen (siehe das Referat darüber in diesen Monatsheften, Bd. 63, S. 305). Hier wird nun die im zweiten Band begonnene Theorie der algebraischen Integrale auf algebraischen Flächen fortgesetzt und später auf algebraische Varietäten höherer Dimensionen verallgemeinert. Besonders wichtig und interessant sind die „einfachen" Integrale 1. Gattung auf algebraischen Flächen, auch Picardsche Integrale genannt, weil sie zuerst von *Picard* entdeckt und untersucht worden sind. Es war für die Forschung von Beginn an auffallend und erregend, daß derartige Integrale im allgemeinen, d. h. auf solchen Flächen, die man ihrer sonstigen Eigenschaften halber als „regulär" bezeichnen müßte, gar nicht existieren, sondern nur auf „irregulären" Flächen. Daß diese vor 50 Jahren noch völlig ungeklärten Zusammenhänge zwischen der Zahl der linear unabhängigen Picardschen Integrale 1. und 2. Gattung und der ganz unabhängig davon definierten Irregularität der Fläche heute fast restlos geklärt sind, ist eines der großen und bleibenden Verdienste des Verfassers.

Die wichtigsten Sätze konnten in der Folge auch auf Varietäten höherer Dimensionen ausgedehnt werden, eine imposante Theorie, zu deren Ausgestaltung und Vervollkommnung — nach den von *Severi* gegebenen Ansätzen — viele Forscher, auch solche der modernsten Richtungen, beigetragen haben: *Lefschetz*, *Zariski*, *Hodge*, *Kähler*, *Kodaira*, *Hirzebruch* u. v. a.

Besonders hervorzuheben ist auch die Verallgemeinerung des Riemann-Rochschen Satzes, welcher in einem von *E. Marchionna* verfaßten Anhang abgeleitet wird. Auch hier ergeben sich wieder interessante Beziehungen zu den Irregularitäten der zugrunde liegenden Varietät. Der Beweis verwendet einige Hilfsmittel der topologisch transzendenten Methoden von *Spencer*, *Kodaira*, *Serre* und *Hirzebruch*; jedoch ist es *Marchionna* inzwischen gelungen, diesen Satz auch allein mit den klassischen Methoden der algebraischen Geometrie zu beweisen, natürlich beschränkt für den klassischen Begriff der algebraischen Mannigfaltigkeit. *W. Gröbner*, Innsbruck

The Differential Geometry of Finsler Spaces. Von *H. Rund*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 101.) XIII, 284 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Geb. DM 55.80; Gln. DM 59.60.

Um *Runds* Werk zu besprechen, ist es wohl zweckmäßig, einiges über Geschichte und Zielsetzung der *Finsler*schen Geometrie vorauszuschicken. Dies empfiehlt sich um so mehr, da der Autor selbst in der Einleitung und auch sonst an vielen Stellen seines Buches den historischen Werdegang in einer Weise schildert, die für ein tieferes Verständnis geradezu nötig erscheint.

Die Grundidee zur Ausbildung des von *Finsler* aufgestellten Lehrgebäudes findet sich bereits in *Riemanns* Habilitationsvortrag. Dort regt *Riemann* Verallgemeinerung seiner Geometrie an, indem man das *Riemann*sche Bogenelement durch eine beliebige Differentialform erster Ordnung ersetzt. Erst zu Beginn unseres Jahrhunderts wurde diese Anregung beachtet. Zuerst wurden die Begriffe geodätische Krümmung und die Gaußsche Krümmung in R_2 verallgemeinert. (*Landsberg, Underhill.*) 1918 erschien die von *Caratheodory* angeregte *Finsler*sche Dissertation, in der die Grundbegriffe vielfach im Anschluß an die Variationsrechnung gegeben wurden. Von 1926 an erschienen die grundlegenden Arbeiten von *Berwald*, die sich auf einen von *E. Noether* herrührenden Invariantenbildungsprozeß stützen und die von *Levi-Civita* ausgearbeiteten Methoden der kovarianten Differentiation auf die *Finsler*sche Geometrie übertrugen. Schon etwas früher waren von *Synge* und *Taylor* Arbeiten erschienen, die ein anderes Vektorübertragungsgesetz zugrundelegten. Als Mangel bei diesen Geometrien empfand *Cartan*, daß bei dieser Art der Parallelübertragung eines Vektors die Länge des Vektors nicht ungeändert bleibt und damit stand in Zusammenhang, daß das Lemma von *Ricci* nicht erhalten blieb. Dies führte ihn dazu, eine neue Art der Vektorübertragung zu definieren, die von diesem Mangel frei war. *Cartan* selbst deduziert seine Geometrie, indem er von bestimmten vorangestellten „Konventionen" ausgeht. *Varga* fand einen geometrischen Zugang. Alle diese Geometrien basieren darauf, daß in jedem Punkt ein Linienelement ausgezeichnet ist. Mehrere Geometer empfanden dies als störend. Hiedurch sah sich der Autor veranlaßt, wieder eine neue Methode der Vektorübertragung auszuarbeiten, bei der örtlich die *Minkowski*sche Geometrie als die die Metrik bestimmende zugrunde gelegt wird. Neben der eigentlichen *Finsler*schen Geometrie, die vom Entfernungsbegriff ihren Ausgangspunkt nimmt, ist für ihre Weiterentwicklung auch die von *Douglas* und *Nebelmann* entwickelte Wegegeometrie von Einfluß geworden. Diese steht zur eigentlichen *Finsler*schen Geometrie in einem ähnlichen Verhältnis wie die projektive zur metrischen Geometrie, und so überrascht es nicht, daß durch Heranziehung der Wegegeometrie die eben besprochenen Methoden übersichtlich geordnet und ergänzt wurden. (*Laugwitz, Bartels.*) Dem Verfasser ist es gelungen, alle diese grundlegenden Gesichtspunkte in einer von tiefem Verständnis zeugenden und sehr anregend wirkenden Form darzustellen. Die ersten drei Kapitel bringen die grundlegenden Ideen, die wir soeben besprochen haben. Das vierte Kapitel bringt die Theorie der Krümmung, das fünfte Kapitel die Theorie der Unterräume. Das sechste Kapitel enthält eine Übersicht über verschiedene Probleme, wie Bewegungsgruppen, konforme Geometrie, Äquivalenzprobleme, Theorie der nichtlinearen Übertragungen, lokale Einbettung, Spezialuntersuchung über zweidimensionale *Finsler*sche Räume.

P. Funk, Wien

Testing Statistical Hypotheses. Von *E. L. Lehmann.* (A Wiley Publication in Mathematical Statistics.) Mit 7 Textabb., XIII, 369 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1959. $ 11.—.

Seit den grundlegenden Arbeiten von *J. Neyman* und *E. S. Pearson* über die Prüfung von Hypothesen sind zahlreiche einschlägige Arbeiten erschienen, die für die Theorie wie für die Praxis von großer Wichtigkeit sind. Ich erwähne etwa die bedeutsamen Arbeiten von *A. Wald* über statistische Entscheidungsfunktionen. Das Buch bringt eine systematische Behandlung der Theorie der Schätzung und der Prüfung von Hypothesen mit zahlreichen Anwendungen.

Wenn auch eine kurze Einführung in die mathematischen Grundlagen — das sind Maß- und Integrationstheorie und Theorie der Wahrscheinlichkeit — gegeben wird, so wird sich ohnehin nur ein Leser mit guten Kenntnissen aus der Mathematik und insbesondere der mathematischen Statistik über die Theorie der Tests informieren wollen. Der Autor erleichtert das Eindringen in die nicht leichte Theorie dadurch, daß er von Beispielen ausgeht und eine Übersicht über die Probleme und Lösungsmethoden gibt. Erst dann wird die vor ca. 30 Jahren von *Neyman* und *Pearson* geschaffene Theorie gebracht, wobei zahlreiche neue Erkenntnisse verwertet werden. Die Maximum-Likelihood-Methode wird kurz behandelt. *Pearson*'s χ^2-Test und *Student*'s t-Test werden gelegentlich verwendet. Ausführlich werden erwartungstreue Schätzfunktionen betrachtet. Neben Parameterschätzungen werden auch nicht-parametrische Tests gebracht. Auch Rangkorrelation und Regressionsanalyse seien erwähnt. Da Tests für die Praxis von großer Wichtigkeit sind, so werden zahlreiche Anwendungen gegeben. Am Ende jedes Kapitels werden zahlreiche Literaturangaben gemacht, um den Leser auf das umfangreiche neue Schrifttum hinzuweisen.

N. Hofreiter, Wien

What is Cybernetics? Von *G. T. Guilbaud*. Englische Übersetzung aus dem Französischen von *V. MacKay*. (Contemporary Science Books.) Mit 26 Textabb., VIII, 126 S. London-Melbourne-Toronto: W. Heinemann. 1959. 10 s 6 d net.

Dieses im guten Sinn populär geschriebene Büchlein soll eine Idee von den Aufgaben der Kybernetik vermitteln. Der Stil des Verfassers ist äußerst anregend und vermeidet die sonst in solchen Büchern übliche breite Ausführung unwesentlicher Details. Es enthält in drei Teilen (sieben Kapiteln) sowohl historische Entwicklung als auch alle Hauptgedanken des aktuellen Wissensgebietes. Der erste, mit „Kontrollsysteme" überschrieben, enthält ein Kapitel über elektrische Netzwerke, Servomechanismen, Zusammenhänge mit dem Nervensystem. Der zweite Teil bringt Informationstheorie, Zusammenhänge mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Übertragung mit Störungen und Ähnliches. Den Schluß bildet teils ein Ausblick, teils eine Kritik des bisher Erreichten. Im Gegensatz zu anderen, sich oft anspruchsvoll gebenden Darstellungen wird hier eine voraussetzungslose und klar geschriebene Übersicht gegeben, die sich spannend liest, wie ein Roman.

K. Prachar, Wien

Standard Mathematical Tables. Formerly Mathematical Tables from Handbook of Chemistry and Physics. Editor in Chief: *Ch. D. Hodgman*. Eleventh Edition. IX, 480 S. Cleveland (Ohio): Chemical Rubber Publishing Co. 1957. Geb. DM 15.75.

Das Buch bringt in handlicher Form eine große Anzahl von Tafeln, die angewandte Mathematiker, Ingenieure und Physiker gut brauchen können. Ich führe an: Logarithmentafeln, Tafeln für die Exponentialfunktion, für trigonometrische und hyperbolische Funktionen, Tafeln der 2. und 3. Potenzen und Quadratwurzeln, Tafeln wichtiger Verteilungen der mathematischen Statistik, Tafeln für unbestimmte und bestimmte Integrale, Tafeln für *Laplace*-Transformationen und Differentialgleichungen und Tafeln der Finanzmathematik. Besondere Sorgfalt wurde auf zweckmäßige Auswahl und auf Genauigkeit verwendet.

N. Hofreiter, Wien

A Table of the Incomplete Elliptic Integral of the Third Kind. Von *R. G. Selfridge* und *J. E. Maxfield.* XIV, 805 S. New York: Dover Publications. 1958. $ 7.50.

Während Tafeln der elliptischen Integrale erster und zweiter Art seit längerer Zeit vorhanden sind, besteht ein Mangel an Tafeln für elliptische Integrale dritter Art. Man hat sich bisher meist Reihenentwicklungen bedient. Um rasche Konvergenz zu erhalten, hat man geeignete Transformationen angewandt. Siehe etwa: *W. Gröbner* und *N. Hofreiter*, Integraltafel I und II, zweite Auflage, Springer-Verlag, Wien 1957/58, insbesondere Seite 59 in I. Das vorliegende Buch enthält die erste 6stellige Tafel der Werte der unvollständigen elliptischen Integrale 3. Art. Die Berechnungen wurden mit einer I. B. M. der Type 704 durchgeführt. Angewandte Mathematiker, Physiker und Ingenieure werden diese Tafel sehr wertvoll finden, führen doch viele Aufgaben der Physik und Technik auf elliptische Integrale 3. Art. *N. Hofreiter*, Wien

From Euclid to Eddington. A Study of Conceptions of the External World. Von *Sir E. Whittaker.* (Dover Books on Science.) IX, 212 S. New York: Dover Publications. 1958. $ 1.35.

Philosophy and the Physicists. Von *L. S. Stebbing.* (Dover Books on Science.) Mit 3 Textabb., XV, 295 S. New York: Dover Publications. 1958. $ 1.65.

Die „Dover Books on Science" haben sich die Aufgabe gestellt, hervorragende Originalwerke der Naturwissenschaften in billigen, broschierten Taschenausgaben auf den Markt zu bringen.

Sir *Edmund Whittakers* „From Euclid to Eddington", zuerst im Verlag der Cambridge University Press erschienen, behandelt in meisterhafter Form die historische Entwicklung der Begriffe der klassischen Physik, der allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik von *Euklid* bis *Eddington.*

Susan Stebbings „Philosophy and the Physicists", zuerst im Verlage Methuen & Co., London 1937 erschienen, behandelt für Philosophen die philosophischen Aspekte der Quantenmechanik bezüglich der Fragenkomplexe Objektivierbarkeit, Kausalitätsproblem und menschliche Freiheit, Entropie und Zeitbegriff.

Durch den billigen Preis dieser Taschenausgaben wird jeder wissenschaftlich Tätige und auch jeder Student instand gesetzt, sich eine mathematisch-physikalische Bibliothek höchster Qualität anzuschaffen. Die Dover Books erfreuen sich demgemäß mit Recht bereits großer Beliebtheit. *Th. Sexl*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

Fortsetzung von der IV. Umschlagseite

leitender Partikel durch magnetische Wanderfelder. — **Bostick, W. H.,** Plasma Motors: The Propulsion of Plasma by Magnetic Means. — **Büchner, E.,** Flüssige und feste Treibstoffe für Raketen. — **Corbeau, J.,** et **C. Diot,** Étude théorique de la combustion de gouttes d'ergols dans une chambre de combustion de propulseur-fusée. — **Gravalos, F. G., I. H. Edelfelt** and **H. W. Emmons,** The Supersonic Flow about a Blunt Body of Revolution for Gases at Chemical Equilibrium. — **Hilsenrath, J., M. S. Green** and **Ch. W. Beckett,** Internal Energy of Highly Ionized Gases. — **Huth, J. H.,** Electric Power for Space Flight. — **Karlovitz, B.,** and **B. Lewis,** Space Propulsion by Interstellar Gas. — **Kármán, Th. von,** Magnetofluidmechanics. A General Lecture. — **Lykoudis, P. S.,** On a Class of Compressible Laminar Boundary Layers with Pressure Gradient for an Electrically Conducting Fluid in the Presence of a Magnetic Field. — **Malin, M. E., R. John, W. Bade, R. Schweiger** and **J. Yos,** Applications of Electric-Arc Plasma Generators to Propulsion. — **Napolitano, L. G.,** Magneto-Fluid-Dynamics of Two Interacting Streams. — **Ostinelli, E.,** Prestazioni-limite delle atronavi a propulsione jonica sfruttanti l'energia di fissione dei nuclei di uranio o di fusione dei nuclei di deuterio. — **Partel, G.,** General Survey in the Ramjet Field and its Significance to Astronautics. — **Peschka, W.,** Über die Verwendbarkeit von atomarem Wasserstoff als Treibstoff für Flüssigkeitsraketen. — **Price, E. W.,** Combustion Instability in Solid Propellant Rocket Motors. — **Rao, G. V. R.,** Contoured Rocket Nozzles. — **Rice, O. K.,** The Recombination of Atoms, and other Energy-Exchange Reactions. — **Sänger, E.,** Strahlungsquellen für Photonenstrahlantriebe. — **Sänger-Bredt, Irene,** Über Arbeitsgase für nicht konventionell beheizte Raketen. — **Serruys, M.,** Contribution de la thermodynamique à l'évaluation des possibilités ou performances des fusées. — **Shepherd, L. R.,** Electrical Propulsions Systems in Space Flight. — **Stuhlinger, E.,** Advanced Propulsion Systems for Space Vehicles. — **Szego, G. C.,** Similitudes and Limitations in Trans-Conventional Propulsion Systems. — **Vandenkerckhove, J. A.,** Note on the Optimum Design of Solid Propellant Power-Plants for Missiles Systems Engineering. — **Winterberg, F.,** Die Erreichung von Ausströmgeschwindigkeiten bis 20.000 m/s durch isotherme Expansion in Kernraketen. — **Zangl, W.,** Le facteur de débit, caractéristique de la qualité de la combustion dans un propulseur-fusée. — **Künstliche Satelliten: Braun, W. von,** The Explorers. — **Casci, C.,** e **V. Giavotto,** Sul tempo di vita dei satelliti artificiali. — **Hibbs, A. R.,** Scientific Results from the Explorer Satellites. — **Jaschek, W. J.,** Die photographische Beobachtung künstlicher Satellitoide. — **Koelle, H. H.,** On the Development of Orbital Techniques. (A Classification of Orbital Carriers and Satellite Vehicles.) — **Merson, R. H.,** Techniques of Analysing Terrestrial Radio and Optical Observations of Earth Satellites. — **Nonweiler, T.,** The Motion of an Earth Satellite on Re-Entry to the Atmosphere. — **Ogorodnikov, K. F.,** Preliminary Summary of Optical Observations of Artificial Earth Satellites. — **Roberson, R. E.,** Principles of Inertial Control of Satellite Attitude. — **Schütte, K.,** Der Einfluß der Genauigkeit des Geschwindigkeitsvektors auf kreisnahe Bahnen künstlicher Satelliten. — **Sedov, L. I.,** Dynamic Effects on the Motion of Earth Sputniks. — **Urbano, R. H.,** Satellite Position Prediction from Six Frequency-Time Pairs. — **Van Allen, J. A., C. McIlwain** and **G. Ludwig,** Radiation Measurements from Explorer IV. — **Raumfahrtbiologie und -medizin: Beckh, H. J. von,** Flight Experiments about Human Reactions to Accelerations which are Followed or Preceded by Weightlessness. — **Eugster, J., R. Koblet** und **D. Simons,** Untersuchungsergebnisse der biologischen Wirkung der Kosmischen Strahlung auf Samen von *Hordeum* (Goldgerste) *Bonus* 01518/B 19 (*Gustavson*) mit besonderer Berücksichtigung der Schweren Primären. — **Gerathewohl, S. J.,** and **G. R. Steinkamp,** Human-Factors Requirements for Putting a Man in Orbit. — **Helvey, T. C.,** Problems of Ground Simulation of Long Range Space Flight Environmental Conditions. — **Jongbloed, J.,** Medical Reflections on Space-Travel.

IXth International Astronautical Congress
IX. Internationaler Astronautischer Kongreß
IX^{e} Congrès International d'Astronautique
Amsterdam 1958

Proceedings **Bericht** **Comptes rendus**

Herausgegeben von

W. v. Braun - A. Eula - B. Fraeijs de Veubeke - F. Hecht - W. B. Klemperer J. M. J. Kooy - F. I. Ordway III - E. Sänger - K. Schütte - L. I. Sedov L. R. Shepherd - J. Stemmer

Schriftleitung: **F. Hecht**

Mit 424 Figuren. I. Teilband: XII, Seite 1—506; II. Teilband: II, Seite 507—970. Gr.-8°. 1959. Ganzleinen S 1248.—, DM 208.—, sfr. 213.—, $ 49.50

Vorzugspreis für Mitglieder der an die IAF (Internationale Astronautische Föderation) angeschlossenen Gesellschaften und für Bezieher der „Astronautica Acta"

Ganzleinen S 998.40, DM 166.40, sfr. 170.40, $ 39.60

Inhaltsverzeichnis: **Astronautik, Allgemeines: Cap, F.,** Relativitätstheorie und Astronautik. — **Haviland, R. P.,** Considerations of the Solar Probe. — **Magness, T. A., J. B. McGuire** and **O. K. Smith,** Accuracy Requirements for Interplanetary Ballistic Trajectories. — **Moeckel, W. E.,** Interplanetary Trajectories with Excess Energy. — **Stearns, E. V.,** An Interplanetary Navigation System. — **Erforschung der hohen Atmosphäre: Cheng, S. I.,** On the Mechanisms of Atmospheric Ablation. — **Krassovsky, V. I.,** Exploration of the Upper Atmosphere by the Help of the Third Soviet Sputnik. — **Raumfahrtphysik, Astrophysik: Boneff, N.,** Sur le danger météoritique en astronautique. — **Cap, F.,** Die Anwendung der *Gröbner*schen Methode zur Lösung von Differentialgleichungen auf das astronautische n-Körperproblem. — **Ehmert, A.,** Indications for Increased Cosmic Radiation in the Interplanetary Space. — **Gadomski, J.,** Fünf Arten von ökosphärischen Planeten. — **Low, W.,** and **Y. Manheimer,** Microwave Measurements of Electron Densities in Ionized Gases. — **Singer, S. F.,** Scientific Problems in Cislunar Space and their Exploration with Rocket Vehicles. — **Wanders, A. J. M.,** The Physical Conditions on the Planet Mars. — **Whipple, F. L.,** Notes on the Immediate Feasibility of an Orbiting Astronomical Telescope. — **Wolczek, O. S.,** Künstliche Kernenergiequellen im Kosmischen Raum. — **Raumfahrttechnik: Faulkner, F. D.,** Some Results from Direct Methods Applied to Optimum Rocket Trajectories. — **Hermann, R.,** Problems of Hypersonic Flight at the Re-Entry of Satellite Vehicles. — **Hunter, M. W., W. B. Klemperer** and **R. J. Gunkel,** Impulsive Midcourse Correction of a Lunar Shot. — **Kler, J. J. de,** On the Degree of Accuracy, to be Attained by Astro-Scanners as an Aid in Automatic Interplanetary Course-Computation. — **Kooy, J. M. J.,** On the Orbital Computations and the Guidance Problem of a Deep Space Rocket. — **Lopes Cardozo, A.,** Automation for Interplanetary Navigation. — **Madden, E. J.,** Panatrack. A Suggested Method of Status Display for Space Travel. — **Miele, A.,** General Variational Theory of the Flight Paths of Rocket-Powered Aircraft, Missiles and Satellite Carriers. — **Roberson, R. E.,** General Guidance and Control Concepts for Satellites and Space Vehicles. — **Winzen, O. C.,** From Balloon Capsules to Space Cabins. — **Raketenantriebe: Ackeret, J.,** A System of Rocket Propulsion Using Reactors and Gas Turbines. — **Altmann, D.,** Chemical Propulsion in the New Space Age. — **Barré, J. J.,** Autopropulseurs fissiothermiques. Processus radiativ de transfert de chaleur permettant d'accroître la poussée massique. — **Bednarczyk, H.,** Beschleunigung

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite